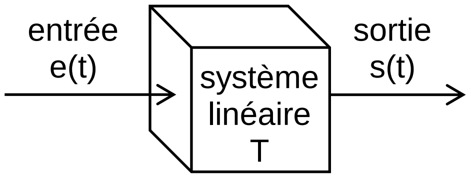
1. qu’appelle-t-on « systèmes linéaires » ?



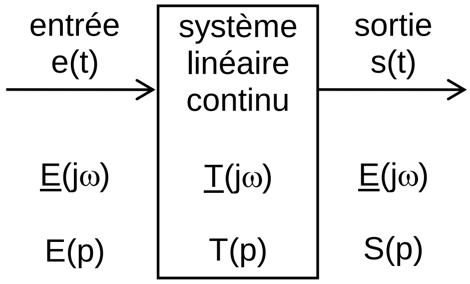
1.1. les différents systèmes

Le tableau ci-dessous permet de citer les différents systèmes et de faire des analogies entres les grandeurs qui régissent ces systèmes.

systèmes	***efforts (unités)***	***flux (unités)***	***paramètres (unités)***		
électriques	u(V)	i(A)	R(Ω)	L(H)	C(F)
mécaniques en translation	F(N)	v(m/s)	f le frottement	m(kg)	k la raideur (N/m)
mécaniques en rotation	C(Nm)	Ω(rad/s)	f	l’inertie J (kgm^2)	K la constante de torsion
thermiques	θ(K)	P(W)	R_{th}(K/W)	…	C la capacité calorifique (J/K)
hydrauliques	débit Q(m^3/s)	pression(Pa)	…	…	…
chimiques	…	…	…	…	…
optiques	…	…	…	…	…

1.2. Représentation d’un système linéaire

➔ **par un schéma bloc**



En **régime sinusoïdal** on utilise les **nombres complexes** avec jω comme variable.

où **T(jω)** est **la transmittance complexe** du système :

$$\boxed{\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}}$$

son module $|\,\underline{T}(j\omega)\,|$ permet de calculer $S = |\,\underline{S}(j\omega)\,| = E \,.\, |\,\underline{T}(j\omega)|$

et son argument arg (T(jω)) de la transmittance nous donne $\varphi_s = \varphi_e + \arg(\,T(j\omega)\,)$.

En **régime transitoire** on utilise la transformée de Laplace où jω est remplacé par **la variable symbolique p**

où **T(p)** est la **transmittance symbolique** du système : $$\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}$$

T(p) est un rapport de **deux polynômes en p**.

on aura **remplacé jω par p** !

➔ par une équation différentielle

Pour un système linéaire, la relation liant l'entrée à la sortie est **une équation différentielle** :

$$s(t) = Ke(t)+K_1\frac{d\,e(t)}{dt} +K_2\frac{d^2e(t)}{dt^2} +K_3\frac{d^3e(t)}{dt^3} + \ldots +L_1\frac{d\,s(t)}{dt} +L_2\frac{d^2s(t)}{dt^2} +L_3\frac{d^3s(t)}{dt^3} + \ldots \qquad (1)$$

La résolution d'une telle équation différentielle est très compliquée.

s(t) est appelé **la réponse** du système linéaire T pour une entrée e(t) donnée.

1.3. intérêt de l'étude des systèmes passe-bas :

La plupart des systèmes rencontrés ont **une fréquence de coupure haute**
- due aux limites des composants (transistors, amplificateurs opérationnels, …)
- due à l'inertie des systèmes mécaniques, électromécaniques, pneumatiques, thermiques, ….

T(p) tend donc vers 0 lorsque la fréquence tend vers l'infini,
donc lorsque p = jω tend vers l'infini.

Ce qui se traduit, puisque la transmittance est le rapport de deux polynômes en p par :

le degré du dénominateur est plus grand que le degré du numérateur

par exemple, les systèmes seront définis par : $T(p) = \frac{3}{1 + 12p}$ ou $\frac{5}{(p+3)(p+12)}$ ou $\frac{120(p+34)}{p^2+7p+22}$)

2. Les systèmes du premier ordre ou systèmes à constante de temps τ

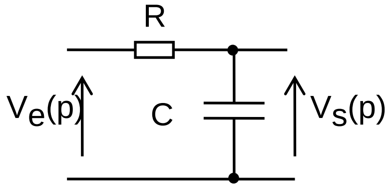
2.1. L'équation différentielle d'un système physique du **premier ordre** est $\boxed{\tau\frac{d\,s(t)}{dt} + s(t) = Ke(t)}$

d'où la **forme canonique de la fonction de transfert T(p)** :

$$\mathbf{T(p) = \frac{K}{1 + \tau p}}$$

où τ est **la constante de temps** du système

K est **l'amplification statique** ou **gain statique**



En régime harmonique nous avons $\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_o}}$

où ω_o était la pulsation de coupure du système, et K = 1.

Pour un filtre RC, $\omega_o = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ et on retrouve la constante de temps bien connue $\boxed{\tau = \frac{1}{\omega_o}}$ = RC.

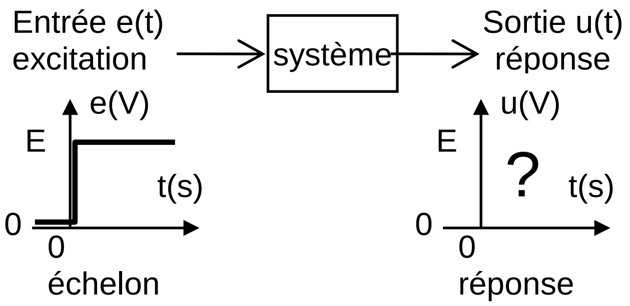
Exemples de systèmes du premier ordre :

le moteur à courant continu $\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$, le thermomètre $\frac{H(p)}{\Theta(p)} = \frac{K}{1 + \tau p}$, …

Conclusions : 1. la constante de temps nous renseigne sur la **rapidité** d'un système.
2. l'amplification statique nous renseigne sur le régime permanent $s(+\infty)=Ke(+\infty)$
3. un système du premier ordre est **toujours stable**.

2.2. La réponse d'un premier ordre à un échelon E

La tension variable e(t) est un **échelon** de valeur E.



on a $\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t<0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$,

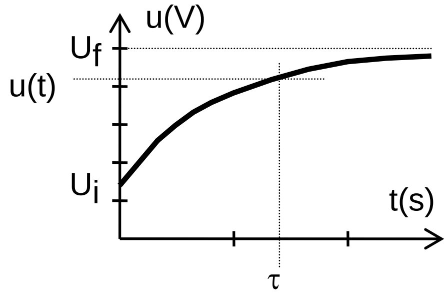
et si E = 1 on dira que u(t) est la **réponse indicielle** du circuit RC.

La réponse d'un système du premier ordre à un échelon E est **exponentielle**
… comme la charge ou la décharge exponentielle d'un condensateur à travers une résistance

La solution générale u(t) :

$$\boxed{u(t) = U_f + (U_i - U_f)\, e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

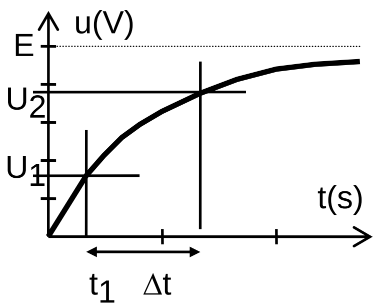
U_i est la valeur initiale de u
U_f est la valeur finale vers laquelle tend la charge
e est l'opérateur exponentiel (e = 2,718281828…)
τ est la constante de temps



2.3. La durée de charge $\Delta t = t_2 - t_1$ pour aller d'un niveau de tension U_1 à un niveau de tension U_2

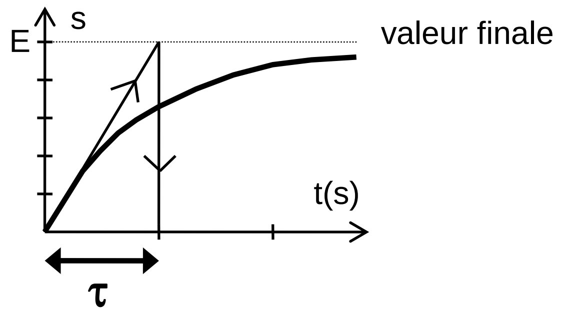
$$\boxed{\Delta t = t_2 - t_1 = \tau \ \ln\left(\frac{U_f - U_1}{U_f - U_2}\right)}$$

Application numérique : C = 1 µF se charge sous 12 V à travers R = 10 kΩ de 4 V à 8 V
- en combien de temps ?

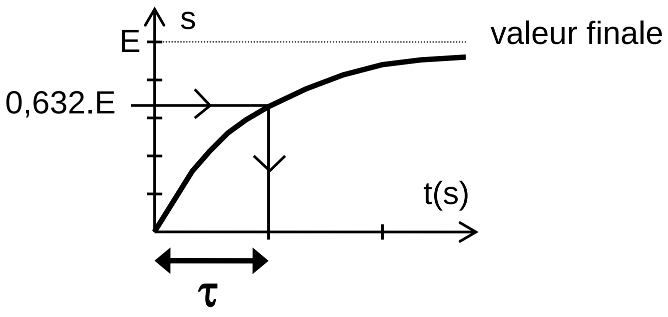


2.4. τ la constante de temps se mesure

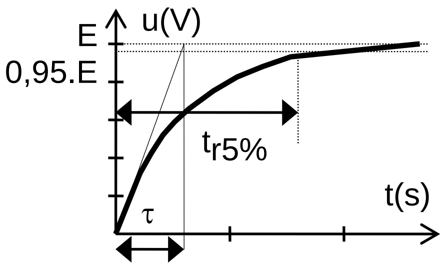
-soit par la **méthode de la tangente à l'origine**



-soit par la **méthode des 63,2 %**
τ est mesuré lorsque la courbe atteint 63,2 % de la valeur finale E



2.5. Le temps de réponse à 5 % :



$t_{r5\%}$: le temps que met un système du premier ordre pour passer de l'état initial (u = 0) à 95 % de l'état final : 95% E.

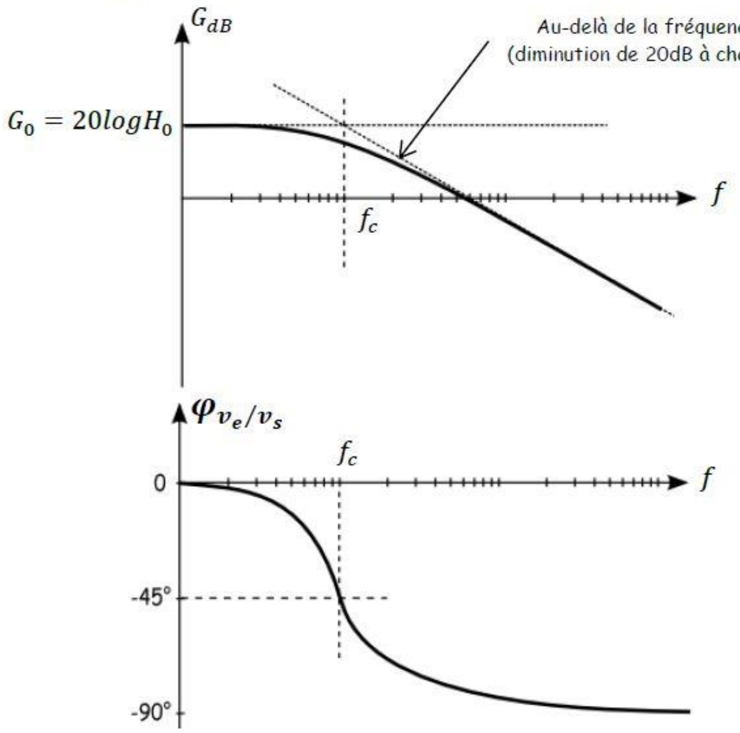
$$t_{r5\%} = \tau \ln\left(\frac{U_f - 0}{U_f - 0{,}95U_f}\right) = \tau \ln 20.$$

retenons que $\boxed{\mathbf{t_{r5\%} = 3\,\tau}}$.

Le **temps de réponse à 5%** d'un système du premier ordre est de $t_{r5\%} = 3\,\tau$

2.6. Réponse en fréquence d'un premier ordre

Pour un système du 1er ordre, on obtient le diagramme du type :



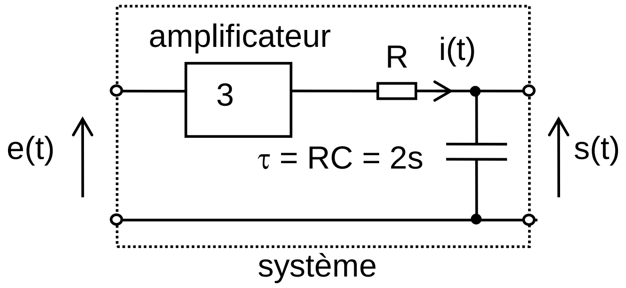
f_c est la fréquence de coupure à -3dB :

$f = f_c$ pour $G_{dB} = G_0 - 3dB$

Pour un système du 1er ordre :

$\varphi_{v_e/v_s} = -45°$ pour $f = f_c$

2.7. exemple de système du premier ordre en électricité



3 e = R i + s

d'où, comme $i = C\frac{ds}{dt}$, l'équation différentielle

est $3\,e = RC\,\frac{ds}{dt} + s$

et sa transformée de Laplace donne

$$3E(p) = RC\,pS(p) + S(p)$$

qui devient $3E(p) = (RC\,p + 1)\,S(p)$ puis $3E(p) = (2p + 1)\,S(p)$

ce qui donne la fonction de transfert ou transmittance symbolique $\boxed{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{3}{1 + 2p}}$

et ce système peut être représenté par le schéma-bloc suivant

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{3}{1 + 2p}} \longrightarrow S(p)$$

Quelle est la **constante de temps** de ce système électrique ?

Quel est **l'amplification statique** de ce système ?

Que vaut alors **S(p)** en fonction de E(p) et $\frac{3}{1 + 2p}$?

En régime statique continu $p = j\omega = 0$ et e = 5 V, que vaut s ?

<u>2.8. exemple de système thermique</u> : un moteur électrique dont les pertes valent P en watts.

Il dissipe P.dt , chaleur produite par effet Joule pendant un temps très court dt.
Appelons $\theta = T_A - T_B$ l'écart de température ; T_A étant la température du moteur et T_B étant la température ambiante.

Lorsque cet écart varie de $d\theta$,
la chaleur du moteur varie de $dQ = C_{th} \,.\, d\theta = m \,.\, c_m \,.\, d\theta$,

et la chaleur dissipée (perdue) est $\frac{\theta}{R_{th}} \,.\, dt$.

On en déduit que $P.dt = m \,.\, c_m \,.\, d\theta + \frac{\theta}{R_{th}} \,.\, dt$ puis $P = m \,.\, c_m \,.\, \frac{d\theta}{dt} + \frac{\theta}{R_{th}}$

on obtient **l'équation différentielle** suivante : $\boxed{P.R_{th} = R_{th}.m.c_m \,.\, \frac{d\theta}{dt} + \theta}$

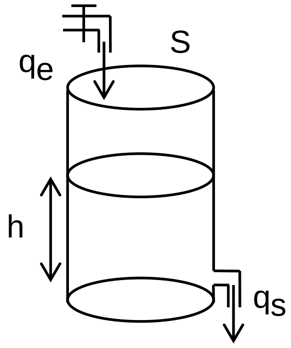
devient par la transformée de Laplace : $P(p).R_{th} = R_{th}.m.c_m \,.\, p\,\Theta(p) + \Theta(p)$

d'où $\boxed{T(p) = \frac{\Theta(p)}{P(p)} = \frac{R_{th}}{1 + R_{th}.m.c_m\,p}}$ $T(p) = \frac{K}{1 + \tau\,p}$ c'est un premier ordre

➔ la solution est exponentielle $\theta(t) = \theta_f + (\theta_i - \theta_f)\exp - \frac{t}{\tau}$

où $\theta_i = T_B$ et $\theta_f = P.R_{th}$ et τ est la constante de temps qui vaut $\tau = R_{th}.m.c_m$.

<u>2.9. exemple en hydraulique : le réservoir qui se vide</u>



Un réservoir de section S [m^2] est rempli à partir de l'instant t = 0 s par un robinet dont le débit est $q_e(t)$.

Le réservoir **se vide avec un débit q_s proportionnel à la hauteur h** du liquide : $q_s = \beta.h(t)$.

Remarque :
c'est une vidange particulière car d'après le théorème de Bernoulli $q_s = k\sqrt{h(t)}$

Le volume v de liquide varie donc pendant une durée dt d'une valeur $v_e = q_e.dt$.

Pendant ce temps le volume diminue de $v_s = q_s.dt$.

Le volume du réservoir varie donc de $dv = q_e.dt - q_s.dt = (q_e - q_s).dt$.

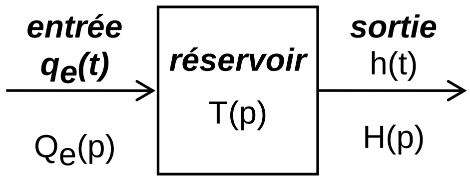
Comme $dv = S.dh(t)$ et $q_s = \beta.h(t)$, il vient $S.dh(t) = (q_e - \beta.h(t)).dt$.

On arrive après transformation à l'équation différentielle liant la hauteur h(t) au débit $q_e(t)$: $\frac{S}{\beta}\frac{dh(t)}{dt} + h(t) = \frac{q_e(t)}{\beta}$.

La transformation de Laplace donne $\frac{S}{\beta}\, p\, H(p) + H(p) = \frac{Q_e(p)}{\beta}$.

La fonction de transfert du réservoir est alors

$$\boxed{\mathbf{T(p) = \frac{H(p)}{Q_e(p)} = \frac{\frac{1}{\beta}}{1 + \frac{S}{\beta}\,.\,p}}}$$



C'est un système du premier ordre dont on reconnaît

- la transmittance statique $T_o = \frac{1}{\beta}$ et la constante de temps $\tau = \frac{S}{\beta}$.

Application numérique :

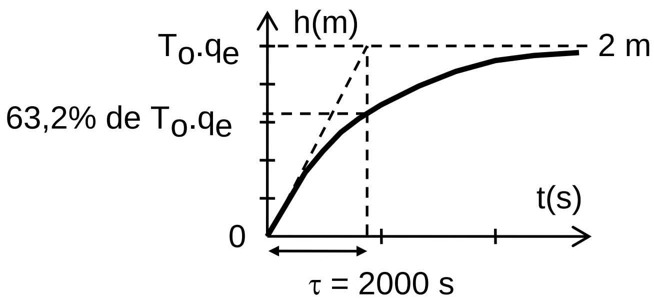
Le réservoir a une section de $S = 1\ m^2$ (rayon de 1,13 m).

Il se remplit avec un débit de 1 litre par seconde donc $q_e = 10^{-3}\ m^3s^{-1}$.

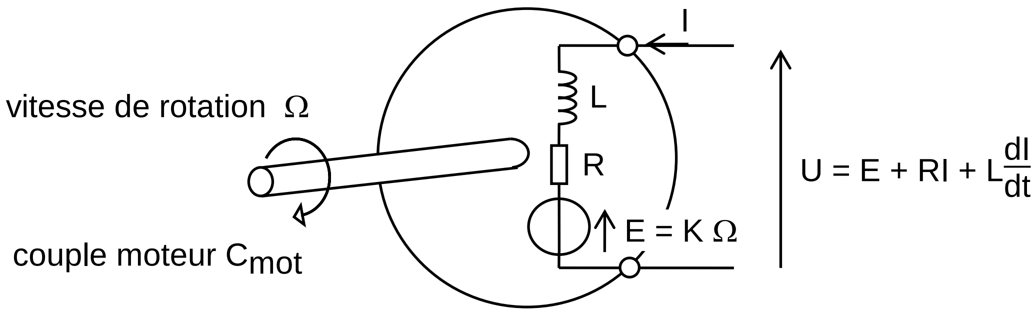
Le coefficient $\beta = \frac{q_e}{h} = 0{,}5 \times 10^{-3}\ m^2s^{-1}$.

On calcule $T_o = 2000\ m^{-2}s$ et $\tau = 2000$ s (soit 33 min et 20 s).

Puis $\mathbf{T(p) = \frac{2000}{1 + 2000\,.\,p}}$ ➔



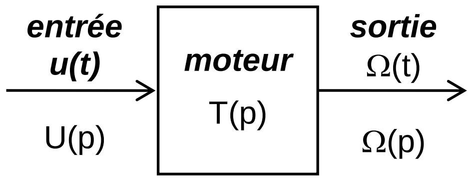
2.10. exemple d'un système du 1° ordre en mécanique en rotation : le moteur électrique



U est la tension d'alimentation, I est le courant de l'induit,
E est la fém, K la constante du moteur, R la résistance d'induit, L l'inductance

Transmittance de Laplace d'un moteur

La transmittance symbolique sera le rapport de la transformée de Laplace Ω(p) de la grandeur de sortie Ω(t), fréquence de rotation, sur la transformée de Laplace U(p) de la grandeur d'entrée u(t) qui , de façon générale est la tension d'alimentation : $\mathbf{T(p) = \frac{sortie}{entrée} = \frac{\Omega(p)}{U(p)}}$.



Dans le domaine temporel, on rappelle les 4 équations qui régissent le moteur à flux constant.

$$\begin{cases} \text{(1) l'équation fondamentale de la dynamique de la partie tournante : } J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega = C_{mot} \\ \text{(2) le couple moteur : } C_{mot} = K\,I \\ \text{(3) loi d'ohm du moteur : } U = E + R\,I + L\dfrac{dI}{dt} \\ \text{(4) la force électromotrice ou fém : } E = K\,\Omega \end{cases}$$

en éliminant C_{mot} et E $\Rightarrow \begin{cases} J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega = K\,I \\ U = K\,\Omega + R\,I + L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$

et, pour simplifier, **en négligeant l'inductance propre L de l'induit du moteur** : L = 0, il vient

$\begin{cases} J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega = K\,I \\ U = K\,\Omega + R\,I \end{cases}$ puis on passe au calcul opérationnel : $\begin{cases} J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\,I(p) \\ U(p) = K\,\Omega(p) + R\,I(p) \end{cases}$

puis $\begin{cases} J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\,I(p) \\ I(p) = \dfrac{U(p) - K\,\Omega(p)}{R} \end{cases}$

et en éliminant I(p) il ne reste qu'une seule relation liant Ω(p) à U(p) :

$\Rightarrow J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\left(\frac{U(p) - K\,\Omega(p)}{R}\right)$

$\Rightarrow [\,J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p)]\,.\,R = K\,U(p)\ \mathbf{-\ K^2\ \Omega(p)} \Rightarrow R\,J\,p\,\Omega(p) + R\,f\,\Omega(p)\ \mathbf{+\ K^2\ \Omega(p)} = K\,U(p)$

puis mettons $\Omega(p)$ en facteur

$[\,(R\,J\,p + R\,f\,) + K^2\,]\ \mathbf{\Omega(p)} = K\ \mathbf{U(p)}$ puis $\frac{\mathbf{\Omega(p)}}{\mathbf{U(p)}} = \frac{K}{(K^2 + R\,f\,) + RJ\,p}$

et finalement

la **transmittance** du moteur s'écrit $\mathbf{T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}} = = \dfrac{\dfrac{\mathbf{K}}{\mathbf{K^2 + R\,f}}}{\mathbf{1 + \dfrac{R\,J}{K^2 + R\,f}\,p}}$

Le moteur est **un système du premier ordre**.
Donc la réponse indicielle est exponentielle.

Le numérateur donne **l'amplification statique** en régime permanent $\mathbf{T_o = \frac{K}{K^2 + R\,f}}$

et le dénominateur nous permet de calculer **la constante de temps** $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{\frac{R\,J}{K^2 + R\,f}}$.

<u>Exemple numérique</u> :

hypothèses :

la constante du moteur vaut $K = \frac{U}{\Omega}$ = 0,5 V / rad / s (ou N m / A),

la résistance de l'induit R = 10Ω, le coefficient de frottement visqueux f = 0,02 N m / rad / s
et le moment d'inertie J = 0,01 kg m^2.

solutions :

L'amplification statique vaut alors $\frac{K}{K^2 + R\,f}$ = **1,11 rad / s / V**

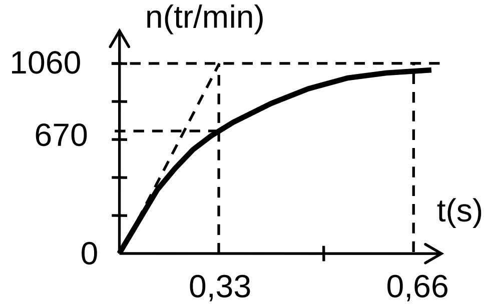
et **la constante de temps** $\tau = \frac{R\,J}{K^2 + R\,f}$ = **0,22 s**

et la fonction de transfert s'écrit $\boxed{\mathbf{T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1{,}11}{1 + 0{,}22\,p}}}$.

On applique un **échelon de tension de 100 V.**
La fréquence en régime permanent est donc de

$n(tr/min) = 1{,}11 \times 100 \times \frac{60}{2\pi} = \mathbf{1060\ tr/min}$.

Cette vitesse est atteinte avec un temps de réponse à 5%
de $t_{r5\%} = 3\tau = \mathbf{0{,}66\ s}$.



3. Les systèmes du second ordre

3.1. propriétés

L'équation différentielle d'un système physique du second ordre est

$\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2m\omega_o\frac{ds(t)}{dt} + \omega_o^2 s(t) = K\, e(t)$, d'où, à conditions initiales nulles, la forme canonique :

$$\mathbf{T(p) = \frac{K}{1 + \frac{2m}{\omega_o}p + \frac{p^2}{\omega_o^2}}}$$

où **K** est **l'amplification statique** ou **gain statique**

m est **le coefficient d'amortissement**

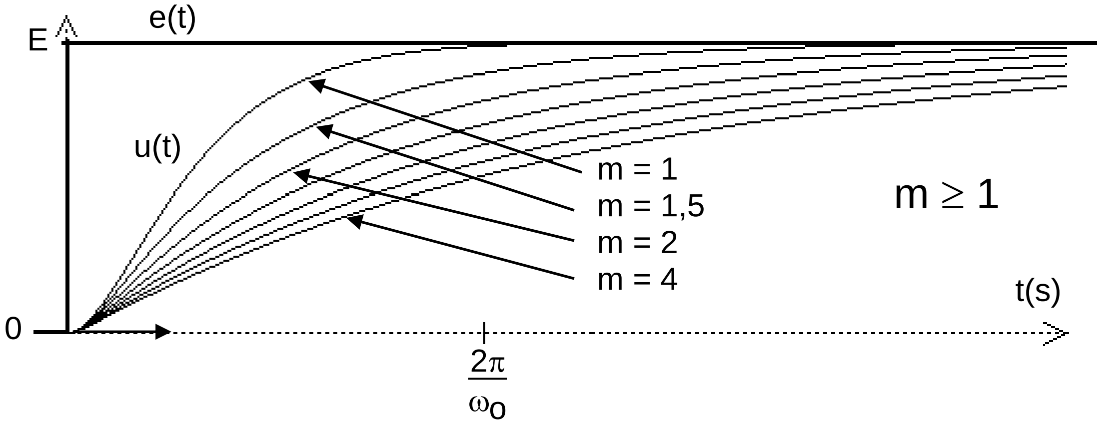
$\boldsymbol{\omega_o}$ est **la pulsation propre** du système

Rappelons qu'en régime harmonique $\underline{T}(j\omega) = \frac{K}{1 + 2\,j\,m\frac{\omega}{\omega_o} + (j\frac{\omega}{\omega_o})^2}$ (LP2)

T(p) s'écrit aussi, si on multiplie numérateur et dénominateur par ω_o^2, $\frac{K\omega_o^2}{p^2 + 2\,m\,\omega_o\,p + \omega_o^2}$.

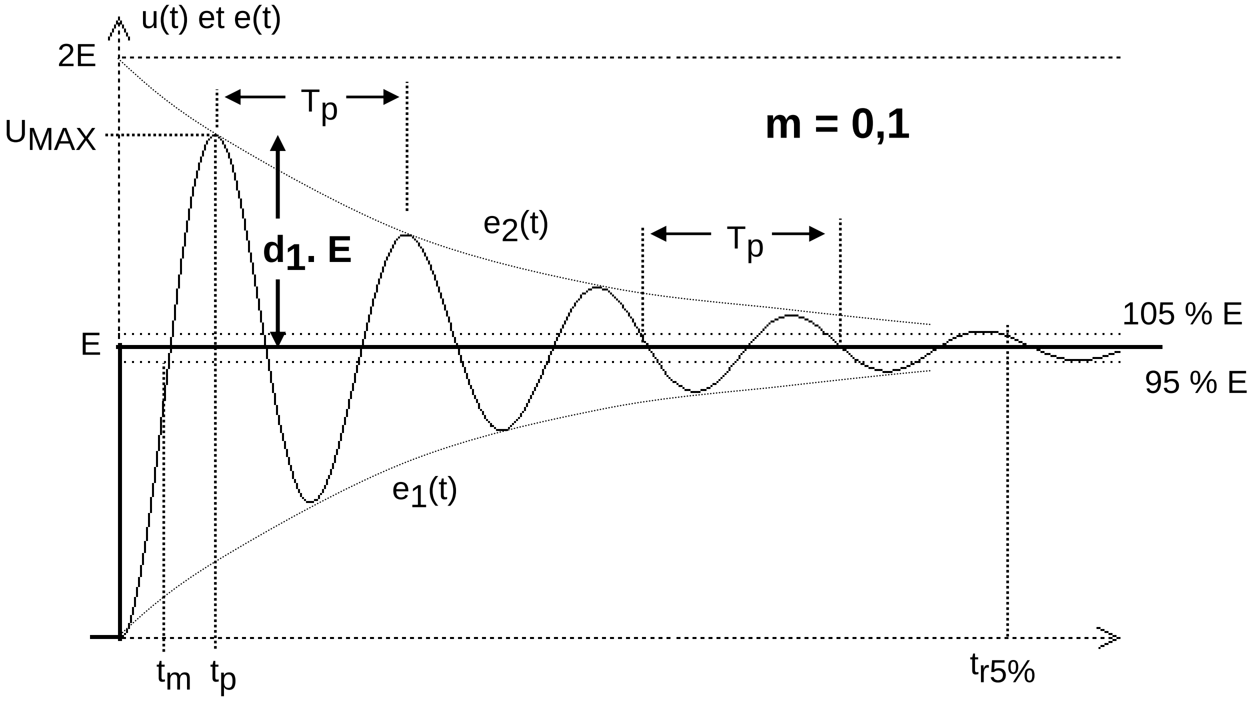
3.2 Réponses indicielles d'un système du 2° ordre

- Si m > 1 , la réponse est **apériodique**
  il y a deux racines réelles négatives : $p_1 = \omega_o(-m+\sqrt{m^2 - 1})$ et $p_2 = \omega_o(-m -\sqrt{m^2 - 1})$,
  alors $T(p) = \frac{K\omega_o^2}{p^2 + 2\,m\,\omega_o\,p + \omega_o^2} = \frac{K\omega_o^2}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{K}{(1 + \tau_1\,p)(1 + \tau_2\,p)}$
  où les **constantes de temps** valent $\tau_1 = \frac{-1}{p_1}$ $\tau_2 = \frac{-1}{p_2}$ ..



- si m = 1, c'est **régime** critique,
  il y a une racine double : $p = -m\omega_o$, ce cas est proche du précédent.

et si m < 1, la réponse est oscillatoire et amortie,

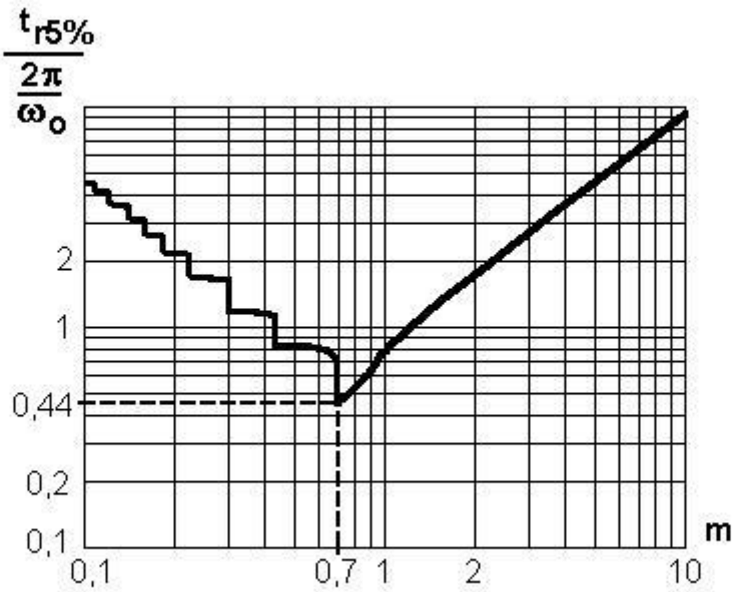


➔ T_p est **la pseudo-période** :

$$\boxed{T_p = \frac{2\pi}{\omega_o\sqrt{1-m^2}}}$$

➔ **$t_{r5\%}$** est **le temps de réponse à 5 %** est le temps **$t_{r5\%}$** au bout duquel la grandeur u(t) est comprise entre 0,95 E et 1,05 E.

Constater que $t_{r5\%}$ est minimal pour m = 0,707 ➔ l**a réponse d'un système est optimale à m = 0,707**.



➔ **le dépassement d**
est défini par la relation

$$\boxed{d_1 = \frac{\text{valeur du premier maximum - valeur finale}}{\text{valeur finale}} = \frac{U_{max} - E}{E}}$$

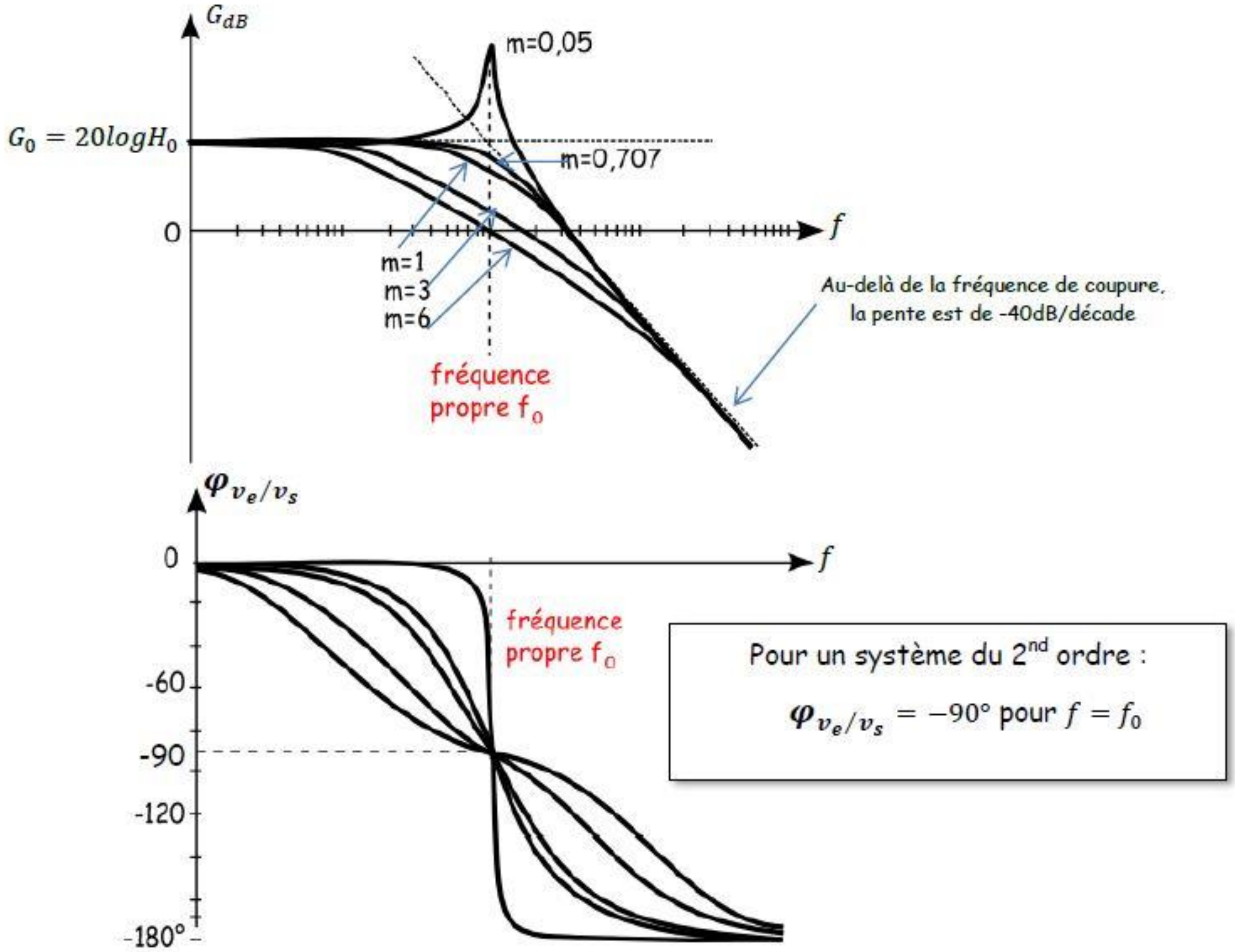
par le calcul : $\boxed{d_1 = \exp(\frac{-\pi m}{\sqrt{1 - m^2}})}$ le dépassement s'exprime souvent en %

Connaissant le premier dépassement d_1, on calcule m avec la relation $\boxed{m = \frac{|\ln d_1|}{\sqrt{\pi^2+(\ln d_1)^2}}}$

➔ **<u>le temps de montée</u> t_m** (ou t_r, l'indice r venant de l'anglais "rise time") est le temps que met un système qui bascule de 0 à E, pour **passer de 10 % de E à 90 % de E** .

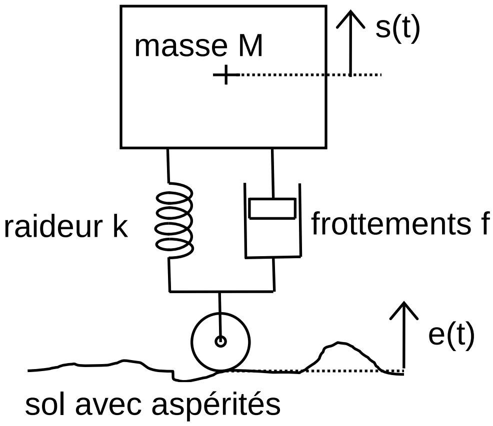
➔ **<u>le temps de pic</u>** , qui est le temps mis pour atteindre le premier maximum,

<u>3.3.Réponse fréquentielle d'un système du 2° ordre</u>



3.4. un exemple d'un système mécanique en translation du deuxième ordre :

les amortisseurs (ou suspensions) **Le BOEING 787 Dreamline**



masse suspendue M = 100 t

la raideur k = 5000 N/mm

le coefficient de frottement visqueux f = 0,001 mNs/mm

e(t) et s(t) sont les positions en mm

le théorème fondamental de la dynamique dit que la somme des forces est nulle :

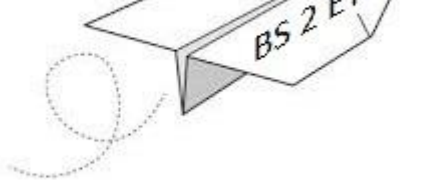
$$M \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + f \frac{ds(t)}{dt} + k\, s(t) = k\, e(t) + f \frac{de(t)}{dt}$$

qui transformée de Laplace donne : $M p^2 S(p) + f\, p\, S(p) + k\, S(p) = k\, E(p) + f\, p\, E(p)$

on met S(p) et E(p) en facteur : $S(p)\,(M p^2 + f\, p + k) = E(p)\,(k + f\, p)$

d'où $T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{k + f\, p}{k + f\, p + M p^2} = \dfrac{1 + \frac{f}{k} p}{1 + \frac{f}{k} p + \frac{M}{k} p^2} = \dfrac{1 + 0{,}2\, p}{1 + 0{,}2\, p + 0{,}01\, p^2}$

$$\boldsymbol{T(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1 + 0{,}2\, p}{1 + 0{,}2\, p + 0{,}01\, p^2}}$$



3.5. Le moteur à courant continu en régime transitoire

Quand on parle de régime transitoire pour un moteur, il s'agit soit du **démarrage**, soit de **l'accélération**, soit d'un **freinage**, soit de **l'arrêt**.

La machine à courant continu est **réversible**, elle fonctionne soit en **moteur**, alors elle transforme l'énergie électrique en énergie mécanique, soit en **génératrice**, alors elle transforme l'énergie mécanique en énergie électrique.

transmittance de Laplace d'un moteur

La transmittance symbolique sera le rapport de la transformée de Laplace $\Omega(p)$ de la grandeur de sortie $\Omega(t)$, fréquence de rotation, sur la transformée de Laplace $U(p)$ de la grandeur d'entrée $u(t)$ qui , de façon générale est la tension d'alimentation : $\mathbf{T(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)}}$.

$$\xrightarrow[U(p)]{\textit{entrée } u(t)} \boxed{\begin{matrix}\textit{moteur}\\ T(p)\end{matrix}} \xrightarrow[\Omega(p)]{\textit{sortie } \Omega(t)}$$

Dans le domaine temporel, on rappelle les 4 équations qui régissent le moteur à flux constant.

$$\begin{cases} J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega = C_{mot} \\ C_{mot} = K\,I \\ U = E + R\,I + L\,\dfrac{dI}{dt} \\ E = K\,\Omega \end{cases} \quad \text{en éliminant } C_{mot} \text{ et } E \Rightarrow \begin{cases} J\dfrac{d\Omega}{dt} + f\,\Omega = K\,I \\ U = K\,\Omega + R\,I + L\dfrac{dI}{dt} \end{cases}$$

Le couple résistant $C_{rés}$ est inclus dans le terme J.

On passe au calcul opérationnel : $\begin{cases} J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\,I(p) \\ U(p) = K\,\Omega(p) + R\,I(p) + L\,p\,I(p) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\,I(p) \\ I(p) = \dfrac{U(p) - K\,\Omega(p)}{R + L\,p} \end{cases}$

$\Rightarrow$ en éliminant I(p) il ne reste qu'une seule relation liant $\Omega(p)$ à $U(p)$:

$$\rightarrow J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p) = K\left(\frac{U(p) - K\,\Omega(p)}{R + L\,p}\right) \Rightarrow [J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p)]\,(R + L\,p) = K\,U(p) - K^2\,\Omega(p)$$

$\Rightarrow [J\,p\,\Omega(p) + f\,\Omega(p)]\,(R + L\,p) + K^2\,\Omega(p) = K\,U(p)$ puis mettons $\Omega(p)$ en facteur

$$\Rightarrow [(J\,p + f)\,(R + L\,p) + K^2]\,\Omega(p) = K\,U(p) \Rightarrow [(K^2 + R\,f) + (RJ + f\,L)\,p + L\,J\,p^2]\,\Omega(p) = K\,U(p)$$

$$\mathbf{T(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)}} = \frac{K}{(K^2 + R\,f) + (RJ + f\,L)\,p + L\,J\,p^2} = \frac{\dfrac{K}{K^2 + R\,f}}{1 + \dfrac{R\,J + f\,L}{K^2 + R\,f}\,p + \dfrac{L\,J}{K^2 + R\,f}\,p^2}$$

la transmittance du moteur $\mathbf{T(p) = \dfrac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{\dfrac{K}{K^2 + R\,f}}{1 + \dfrac{R\,J + f\,L}{K^2 + R\,f}\,p + \dfrac{L\,J}{K^2 + R\,f}\,p^2}}$.

Le moteur est un système du deuxième ordre.

On détermine d'abord la pulsation propre ω_o et la fréquence propre $\mathbf{f_o = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K^2 + R f}{L J}}}$.

Le coefficient d'amortissement est $\mathbf{m = \frac{R J + L f}{2 \sqrt{L J (K^2 + R f)}}}$.

Exemple numérique **:**

hypothèses :

K = 0,5 V / rad / s, R = 10 Ω, f = 0,02 N m / rad / s et J = 0,01 kg m^2.
L'inductance du moteur vaut maintenant L = 300 mH

solutions :

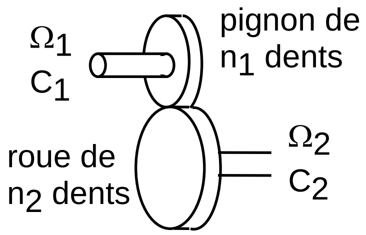
amplification statique $\frac{K}{K^2 + R f}$ = 1,11 rad / s / V.

f_o = 2 Hz et m = 1,5 ce qui correspond au régime apériodique amorti

d'où sa fonction de transfert

T(p) =

4. Le réducteur mécanique de vitesse



__Les engrenages__ : mécanisme formé de **roues dentées**.
La plus petite des deux roues est appelée **pignon**.
Les vitesses de rotation $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$ respectives des roues d'engrenage dépend du **nombre de dents n_1 et n_2** de chacune.
Roue et pignon tournent en sens opposé.

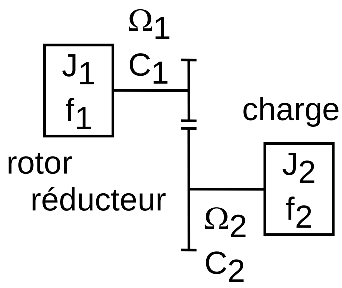
4.1. intérêt de réduire la vitesse

- la vitesse de l'arbre d'un moteur est souvent trop élevée,
- la charge doit se déplacer lentement et avec un fort couple.

4.2. le rapport de transformation m

Le rapport de transformation m, pour un réducteur sans pertes est le quotient :

$$\boxed{m = \frac{n_2}{n_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_2}} .$$



La conservation de la puissance au niveau des engrenages permet d'écrire $P_1 = P_2$ et donc $\mathbf{C_1.\Omega_1 = C_2.\Omega_2}$.

__Remarque__ : cette relation nous rappelle que si la vitesse est réduite, on a l'avantage d'augmenter dans la même proportion le couple.

4.3. la loi fondamentale de la dynamique

Un moteur solidaire d'un arbre et de l'engrenage moteur a un moment d'inertie J_1, un coefficient de frottement visqueux f_1. J_2 et f_2 sont les coefficients côté charge.

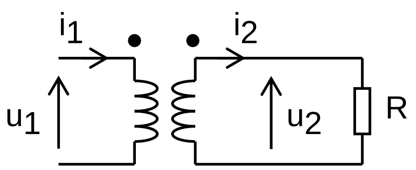
$$\begin{cases} J_1 \dfrac{d\Omega_1}{dt} + f_1\,\Omega_1 = C_1 - C_{rés} \quad \text{où } C_{rés} = \dfrac{C_2}{m} \\ J_2 \dfrac{d\Omega_2}{dt} + f_2\,\Omega_2 = C_2 \end{cases} \Rightarrow J_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + f_1\,\Omega_1 = C_1 - \frac{J_2}{m}\frac{d\Omega_2}{dt} - \frac{f_2}{m}\,\Omega_2$$

$$\Rightarrow \text{en remplaçant } \Omega_2 \text{ par } \frac{\Omega_1}{m} : \left(J_1 + \frac{J_2}{m^2}\right)\frac{d\Omega_1}{dt} + \left(f_1 + \frac{f_2}{m^2}\right)\Omega_1 = C_1.$$

Tout se passe comme si le moteur avait un moment d'inertie $J = J_1 + \dfrac{J_2}{m^2}$

et un coefficient de frottement $f = f_1 + \dfrac{f_2}{m^2}$.

Remarquons l'**analogie** du réducteur de vitesse **avec le transformateur parfait** pour les tensions et les courants quant au rapport de transformation et à l'impédance ramenée au primaire appelée R_p. D'après les bornes homologues, u_1 et u_2 sont en phase, alors,



$$m = \frac{\underline{U_2}}{\underline{U_1}} = \frac{\underline{I_1}}{\underline{I_2}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{et } \mathbf{R_p} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{I_1}} = \frac{\underline{U_1}}{\underline{U_2}} \cdot \frac{\underline{U_2}}{\underline{I_2}} \cdot \frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}} = \frac{1}{m} \cdot R \cdot \frac{1}{m} = \frac{\mathbf{R}}{\mathbf{m^2}}$$