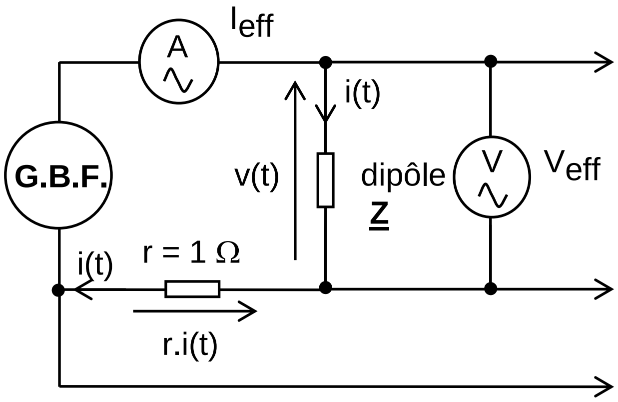
4.1. L'objectif de l'étude de dipôles passifs en régime sinusoïdal montage utilisé pour étudier un dipôle résistif, capacitif ou inductif



voie 1 de l'oscilloscope
CH 1 visualise v(t)
ri(t) est négligeable devant v(t)

voie 2 de l'oscilloscope
CH 2 visualise 1 x i(t)

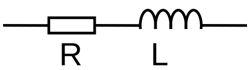
masse de l'oscilloscope
et masse du G.B.F.
GND = ground

Un multimètre sur position "~" ou "alternatif" ou "RMS"
mesure les valeurs efficaces $\mathbf{V_{eff}}$ et $\mathbf{I_{eff}}$

L'oscilloscope sert à mesurer le déphasage de la tension v(t) par rapport au courant i(t) :

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 2\pi \frac{\tau}{T}$$

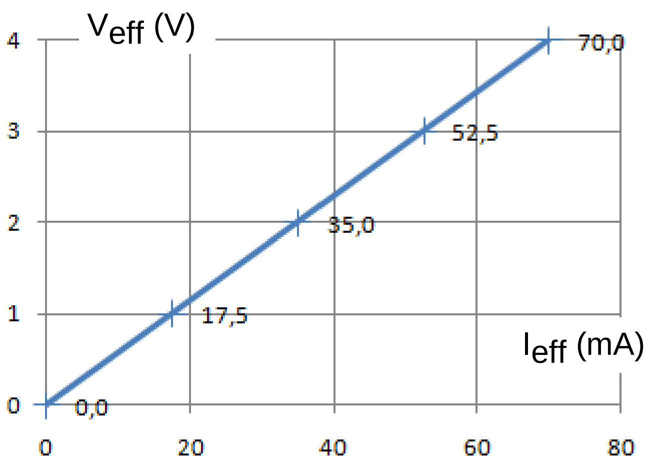
4.2. la bobine réelle RL



le modèle équivalent série :

R est la résistance du cuivre de la bobine, prenons **R = 50 Ω**
L est l'inductance, prenons **L = 2,2 mH**

➔ **à fréquence constante** f = 2 kHz faisons varier V_{eff} et relevons la courbe $V_{eff} = f(I_{eff})$



V_{eff} est proportionnel à I_{eff} et si on calcule ce coefficient de proportionnalité on trouve

$$\frac{V_{eff}}{I_{eff}} = \frac{3}{52{,}5.10^{-3}} = 57{,}1$$

c'est l'impédance réelle en Ω.

Donc, à fréquence constante, Z est constant
et Z = 57,1 Ω

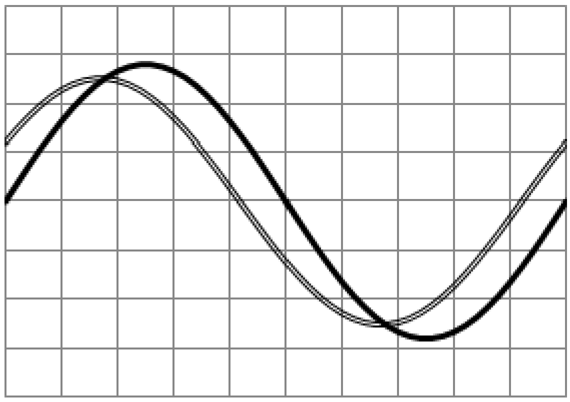
conclusion : **à fréquence constante l'impédance est constante** à 2 kHz, l'oscillogramme montre qu'il y a un déphasage entre courant et tension

$$\varphi = 360\,\frac{\tau}{T} = 360\,\frac{0{,}8\ \text{div}}{10\ \text{div}} = 29°$$

si on change la valeur de U_{max} on observe que φ ne change pas

conclusion : **à fréquence constante l'impédance complexe est constante**

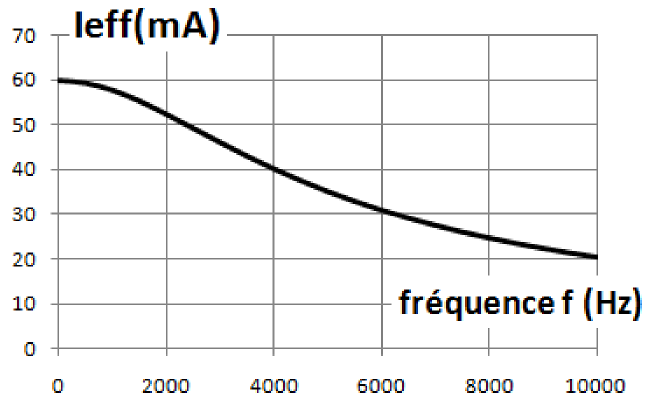
ici $\underline{Z}$ = [57,1 Ω ; 29°] = 50 + 28 j

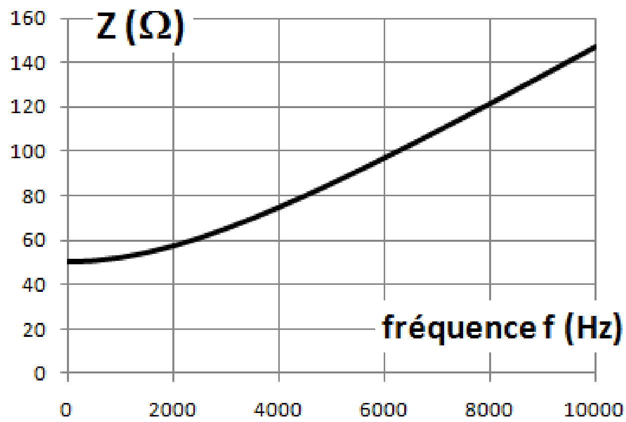


sensibilités verticales :
v_1 : 1 V / div.
v_2 = ri : 20 mV / div. (r = 1 Ω)
sensibilité horizontale : 50 µs / div.

➔ <u>à tension constante Ueff = 3 V et à fréquence variable</u>

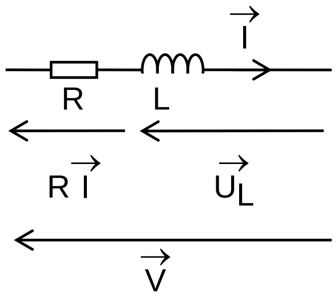
on relève : I_{eff} et on en déduit l'impédance réelle $Z = \frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{3}{I_{eff}}$





conclusion : **l'impédance varie avec la fréquence**

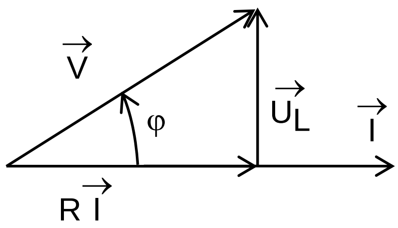
➔ calcul de Z et φ avec la représentation vectorielle



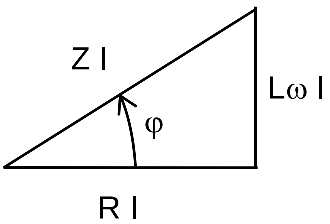
loi de la maille :

$\vec{V} = R\vec{I} + \vec{U_L}$

d'où le diagramme vectoriel suivant

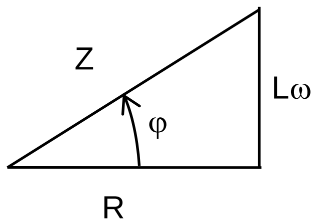


comme V = Z I et UL = Lω I le diagramme vectoriel devient



et en divisant partout par I

il vient
le triangle des impédances



les relations dans le triangle rectangle permettent de calculer

l'impédance réelle $\mathbf{Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$

et le déphasage introduit par la bobine $\mathbf{\varphi = \arctan \frac{L\omega}{R}}$

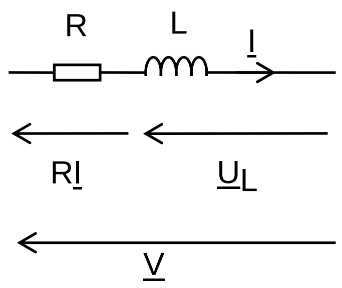
application numérique : R = 50 Ω, L = 2,2 mH, f = 2 kHz donne

$$L\omega = 2{,}2 \times 10^{-3} \times 2\pi \times 2000 = 27{,}6\ \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} = \sqrt{50^2 + 27{,}6^2} = 57{,}1\ \Omega$$

$$\varphi = \arctan \frac{L\omega}{R} = \arctan \frac{27{,}6}{50} = 29°$$

➔ **calculs à l'aide des complexes**



loi de la maille :

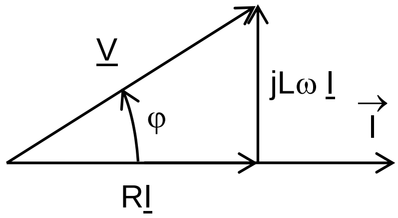
$\vec{V} = R\,\vec{I} + \vec{U_L}$

donne

$\mathbf{\underline{V} = R\,.\,\underline{I} + \underline{U}_L}$

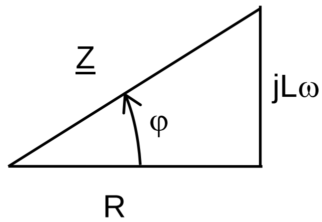
$\mathbf{= R\,.\,\underline{I} + jL\omega\,.\,\underline{I}}$

d'où la représentation :



en écrivant que $\mathbf{\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I} = R\,\underline{I} + jL\omega\,\underline{I}}$ et en simplifiant par $\mathbf{\underline{I}}$
on obtient

l'impédance complexe de l'association série : $\mathbf{\underline{Z} = R + jL\omega}$



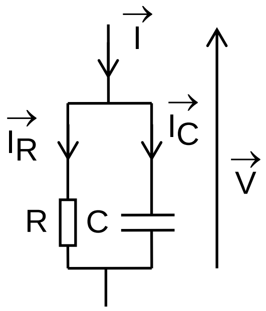
ce qui donne l'impédance réelle, **module** de $\underline{Z}$: $\mathbf{Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$

et le déphasage introduit par la bobine, **argument** de $\underline{Z}$:

$\varphi = \arctan \dfrac{\text{partie imaginaire de } \underline{Z}}{\text{partie réelle de } \underline{Z}}$ donc $\boldsymbol{\varphi = \arctan \dfrac{L\omega}{R}}$

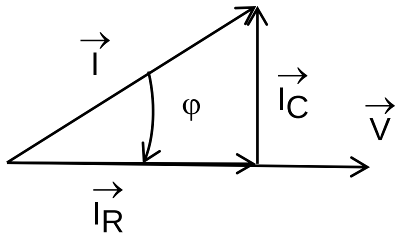
on obtient le même résultat qu'avec les vecteurs
et **plus rapidement** puisqu'il n'est pas nécessaire de faire un diagramme à l'échelle

4.3. un condensateur C en parallèle avec une résistance R

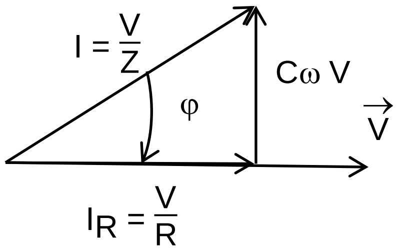


la tension est commune avec les deux composants

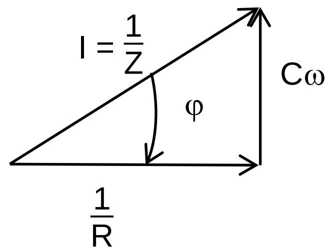
et la loi de nœuds s'écrit
$i(t) = i_R(t) + i_C(t)$
donc
$\vec{I} = \vec{I_R} + \vec{I_C}$
d'où le diagramme ci-contre



et comme $I = \frac{V}{Z}$, $I_R = \frac{V}{R}$ et $I_C = C\omega\, V$ on en déduit



et le triangle des admittances



Finalement on en déduit $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + (C\omega)^2$

puis $\frac{1}{Z} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}$ et $\mathbf{Z = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}}}$

de même pour la phase négative $\varphi = \arctan \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$ ➔ $\boldsymbol{\varphi = -\arctan RC\omega}$

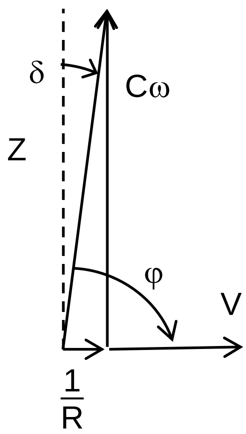
➔ avec le calcul complexe

l’impédance complexe obtenue rapidement en calculant d'abord l'admittance équivalente, somme des admittances

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega \;➔\; \mathbf{\underline{Z} = \dfrac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}}$$

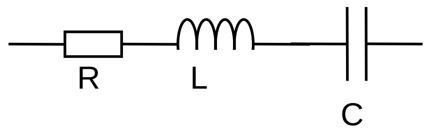
ce qui donne l’impédance réelle $\mathbf{Z = \dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (C\omega)^2}}}$

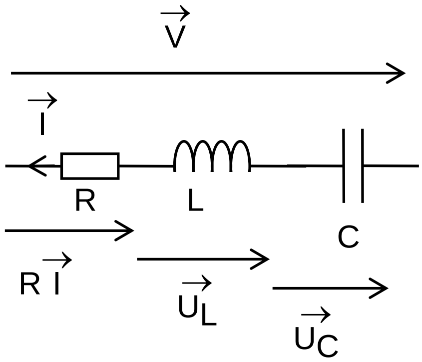
$\Rightarrow$ le déphasage $\boldsymbol{\varphi = -\arctan RC\omega}$



l’angle de pertes $\boldsymbol{\delta = \dfrac{1}{RC\omega}}$ (en radians)
est défini pour un condensateur C ayant une résistance R de pertes

4.4. le circuit RLC série

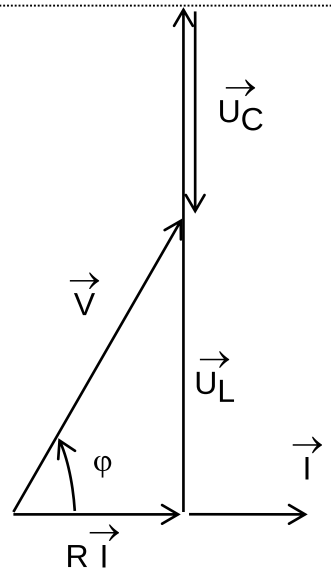




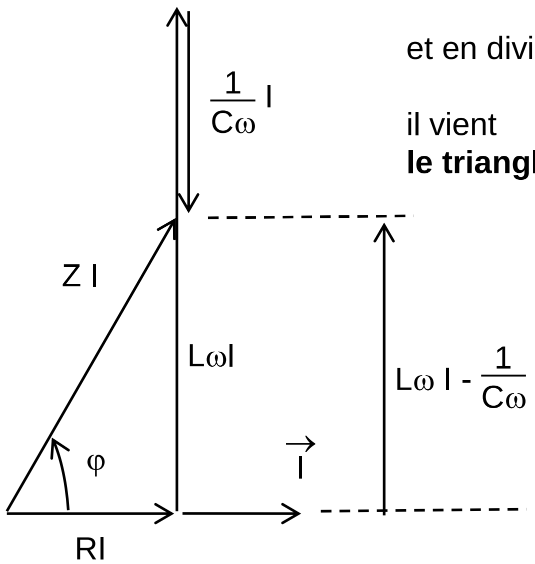
loi de la maille

$\vec{V} = R\vec{I} + \vec{U_L} + \vec{U_C}$

donne
le diagramme vectoriel

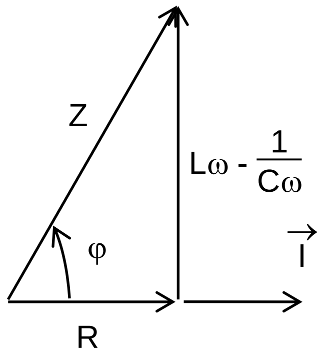


comme $V = Z\,I$ et $U_L = L\omega\,I$ et $U_C = \frac{1}{C\omega}\,I$, le diagramme vectoriel devient



et en divisant partout par I

il vient
le triangle des impédances



les relations dans ce triangle rectangle permettent de calculer

l'impédance réelle $\mathbf{Z = \sqrt{(R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2)}}$ et le déphasage $\boldsymbol{\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)}$

<u>Avec la méthode des complexes</u> on obtient la même chose :

l'impédance complexe est $\mathbf{\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})}$

elle donne l'impédance réelle $\mathbf{Z = \sqrt{(R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2)}}$

le déphasage introduit par le circuit RLC est alors $\boldsymbol{\varphi = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)}$

Le phénomène de résonance série

la fréquence de résonance f_r est la fréquence pour laquelle $\left(L\omega_r - \frac{1}{C\omega_r} \right) = 0$

$$\Rightarrow \quad L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r} \quad \Rightarrow \quad LC\omega_r{}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_r{}^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

à cette fréquence $\underline{Z}$ = R, Z = R, φ = 0

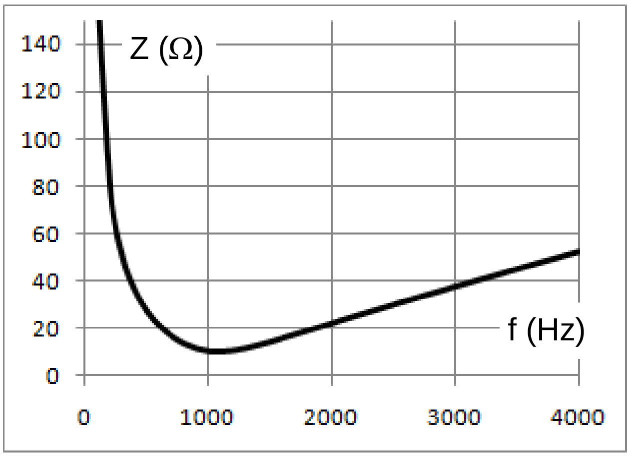
et suivant la valeur de R comparée à $L\omega_r = \frac{1}{C\omega_r}$ on a

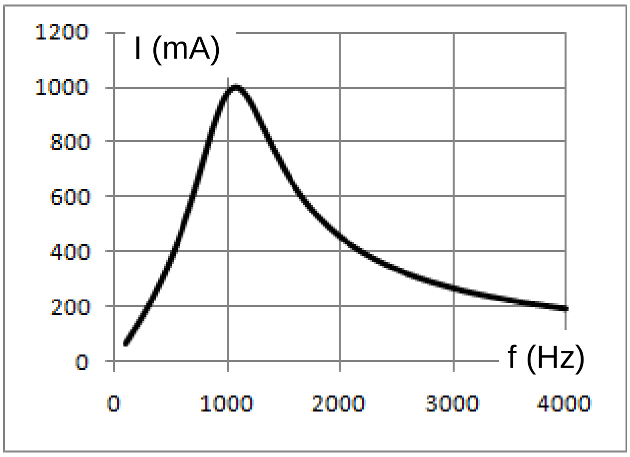
soit une **résonance aiguë**

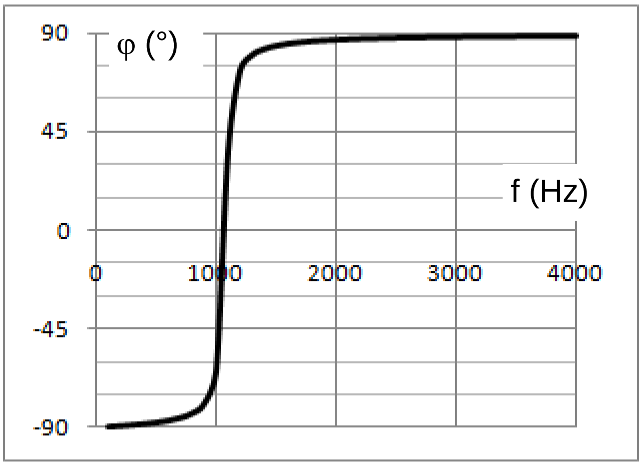
soit une **résonance floue**.

Exemple : prenons R = 10 Ω, L = 2,2 mH et C = 10 µF
V = 10 V

les formules précédentes permettent de tracer Z, $I_{eff} = \frac{V}{Z}$ et $\varphi = \varphi_V - \varphi_i$ en fonction de la fréquence de v







la fréquence de résonnance est de

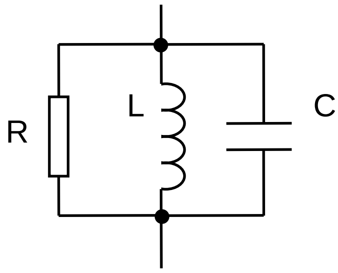
f_r = 1073 Hz

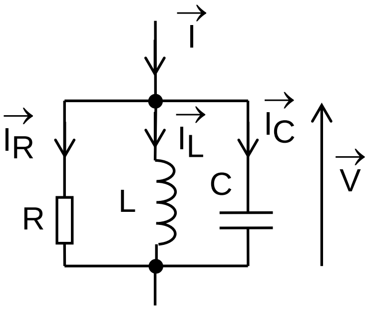
f < f_r le circuit RLC série est **capacitif**

f = f_r le circuit RLC série est **résistif**

f > f_r le circuit RLC série est **inductif**

4.5. le circuit RLC parallèle





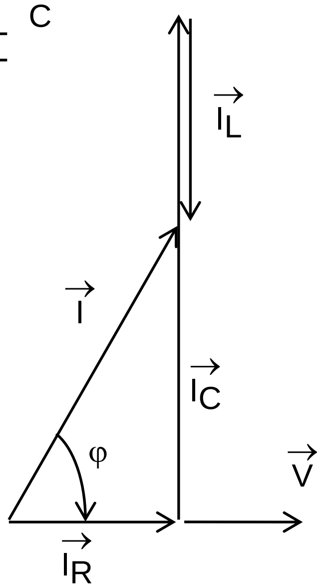
la loi des noeud

$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C$

donne

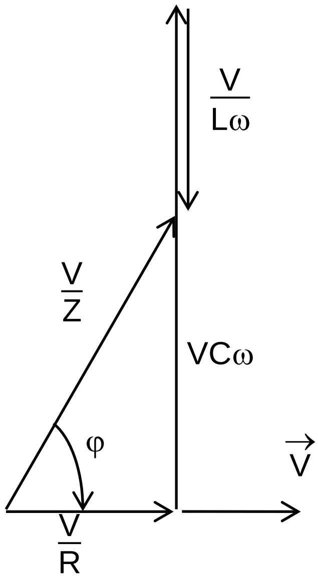
le diagramme vectoriel

des courants

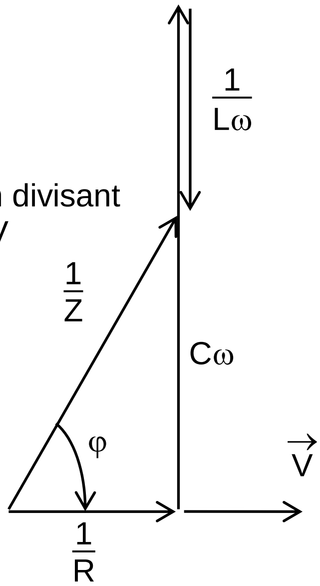


la longueur des vecteurs est $I = \frac{V}{Z}$, $I_R = \frac{V}{R}$, $I_L = \frac{V}{L\omega}$ et $I_C = VC\omega$

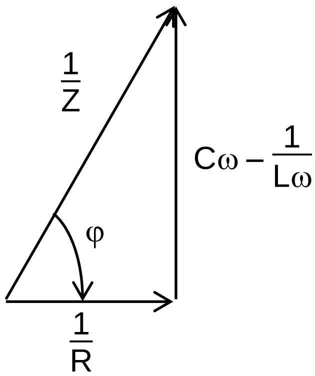
on obtient les diagrammes



et en divisant par V



ou



de ce dernier triangle, il vient $\left(\frac{1}{Z}\right)^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$

➔

$$\mathbf{Z = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{R})^2 + (C\omega - \frac{1}{L\omega})^2}}}$$

$$\boldsymbol{\varphi = - \arctan R(C\omega - \frac{1}{L\omega})}$$

<u>Avec la méthode des complexes</u> on obtient la même chose :

l'impédance complexe est l'inverse de la somme des admittances :

$\underline{Z} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{L\omega} + jC\omega}$ pour trouver $\boldsymbol{\underline{Z} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R} + j(C\omega - \dfrac{1}{L\omega})}}$

qui donne l'impédance réelle $\boldsymbol{Z = \dfrac{1}{\sqrt{(\dfrac{1}{R})^2 + (C\omega - \dfrac{1}{L\omega})^2}}}$

et le déphasage introduit par le circuit RLC est alors $\boldsymbol{\varphi = -\arctan R(C\omega - \dfrac{1}{L\omega})}$

<u>la résonance parallèle</u>

<u>la fréquence de résonance</u> $\boldsymbol{f_r}$ est la fréquence pour laquelle $(C\omega_r - \dfrac{1}{L\omega_r}) = 0$

et comme pour le circuit série $\boldsymbol{f_r = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$

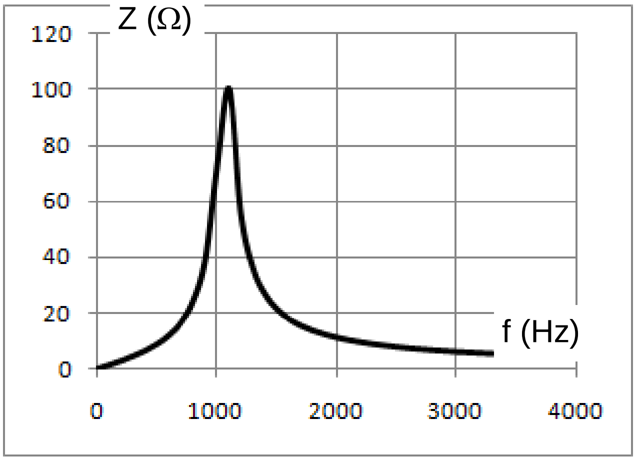
à cette fréquence $\underline{Z} = R$, $Z = R$, $\varphi = 0$.

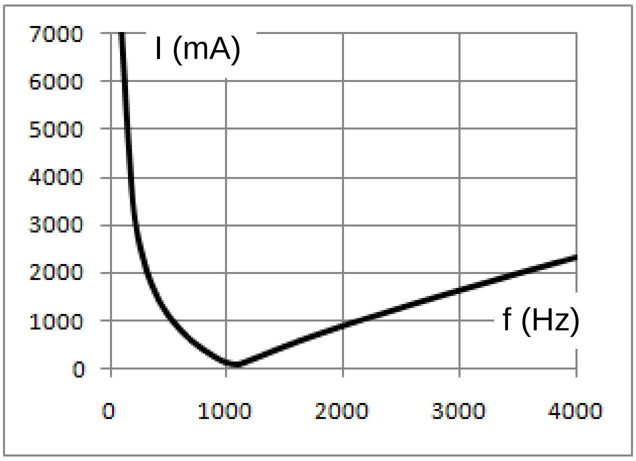
S'il n'y a pas de résistance R, R = +∞ , l'impédance Z à la résonance est infinie,
il n'y a pas de courant qui « passe » ;

c'est pour cette raison qu'on appelle le circuit RLC parallèle **« circuit bouchon ».**

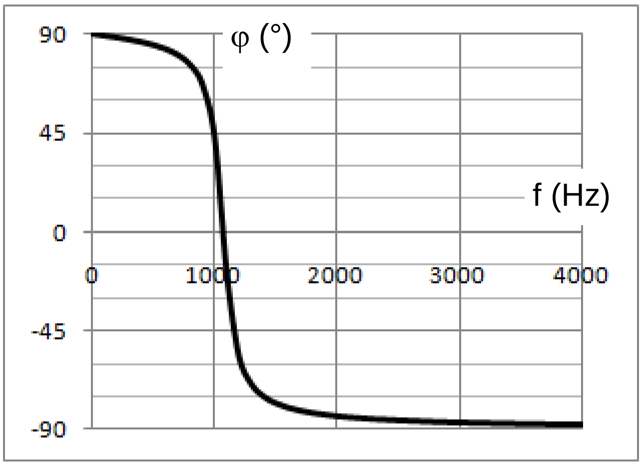
<u>Exemple</u> : prenons R = **100 Ω**, L = **2,2 mH** et C = **10 µF**
V = 10 V

les formules précédentes permettent de tracer Z, $I_{eff} = \frac{V}{Z}$ et $\varphi = \varphi_V - \varphi_i$ en fonction de la fréquence de la tension v





belle **résonance aigue** !



la fréquence de résonnance est toujours de

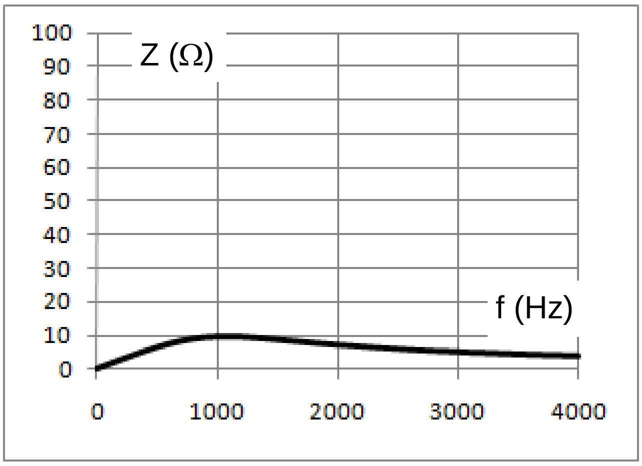
$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 1073 \text{ Hz}$$

$f < f_r$ le circuit RLC parallèle est **inductif**

$f = f_r$ le circuit RLC parallèle est **résistif**

$f > f_r$ le circuit RLC parallèle est **capacitif**

ci- dessous, R = **10 Ω**, on a alors une résonance **floue**



4.6. <u>vocabulaire et modèles électriques équivalents</u> :

L'impédance $\underline{Z}$

$\underline{Z}$ s'écrit R + j X où R est **la résistance** et X est **la réactance**

si X est positif, le dipôle est inductif et $X = + L\omega$

si X est négatif, le dipôle est capacitif et $X = -\dfrac{1}{C\omega}$

L'admittance $\underline{Y}$

$\underline{Y}$ *s'écrit G + j B où* G est **la conductance** et B **la susceptance**.

exemple :

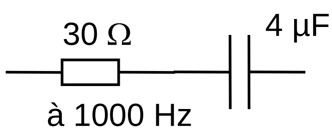
si on trouve pour un dipôle Z **à 1000 Hz** une impédance de **$\underline{Z}$ = 30 - 40 j**

Son impédance réelle est $Z = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\ \Omega$,

sa résistance est de R = 30 Ω

sa réactance est de X = - 40 Ω et correspond à un condensateur tel que $\dfrac{1}{C\omega} = 40$

$\Rightarrow \dfrac{1}{40\ \omega} = C \Rightarrow C = \dfrac{1}{40 \times 2\pi \times 1000} = 4\ \mu F$



le schéma électrique équivalent série est

Son admittance $\underline{Y} = \dfrac{1}{30 - 40\,j} = \dfrac{[1 : 0°]}{[50\ \Omega : -53°]} = [\ \dfrac{1}{50}\ ;\ 0° - (-53°)\ ] = [\ 0{,}020\ S\ ;\ +53°\ ]$

$= 0{,}012 + 0{,}016$

sa conductance est de 0,012 siémens donc 12 mS

sa susceptance est de 0,016 siémens donc 16 mS