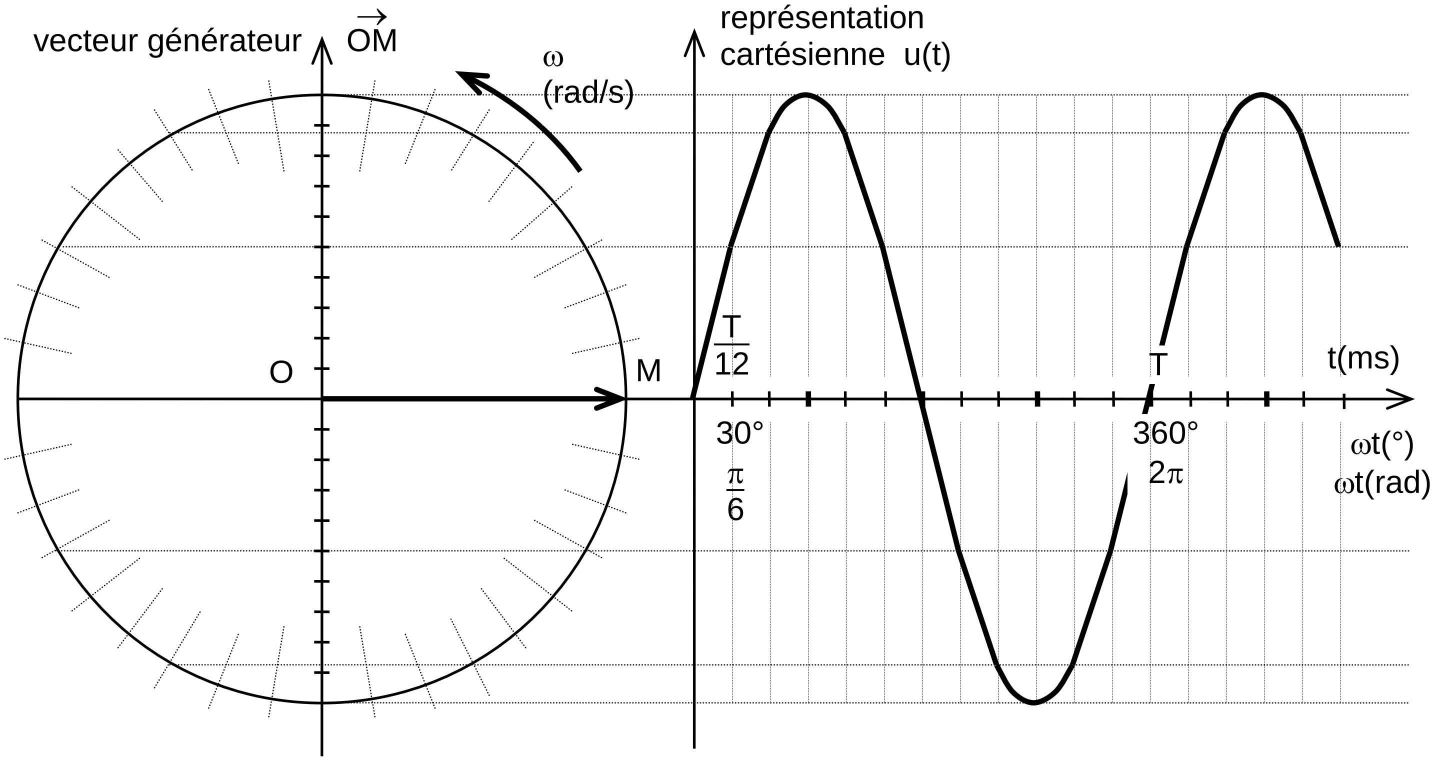
2.1. <u>La fonction sinus</u> est obtenue par la projection d'un vecteur $\vec{OM}$ tournant



$\vec{OM}$ est le **vecteur générateur** dont la longueur correspond à l'amplitude A = | $\vec{OM}$ | = OM

La pulsation ω est la vitesse angulaire du vecteur générateur $\vec{OM}$ tournant dans le sens trigonométrique. Elle s'exprime habituellement en **radians par seconde (rad/s)**.

Un tour du vecteur $\vec{OM}$ correspondant à un angle de 2π radians ou 360° se fait en une période T (en secondes : s).

D'où l'expression de la pulsation $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\,\pi\, f}$ en rad/s.

L'expression mathématique de la courbe u(t) obtenue s'écrit

$\boxed{u(t) = A \sin(\omega t)}$ u est la *hauteur* de $\vec{OM}$.

A = | $\vec{OM}$ | = U_{max} = $U_{crête}$ = U_{peak} = Û est **l'amplitude** de u(t) en volts

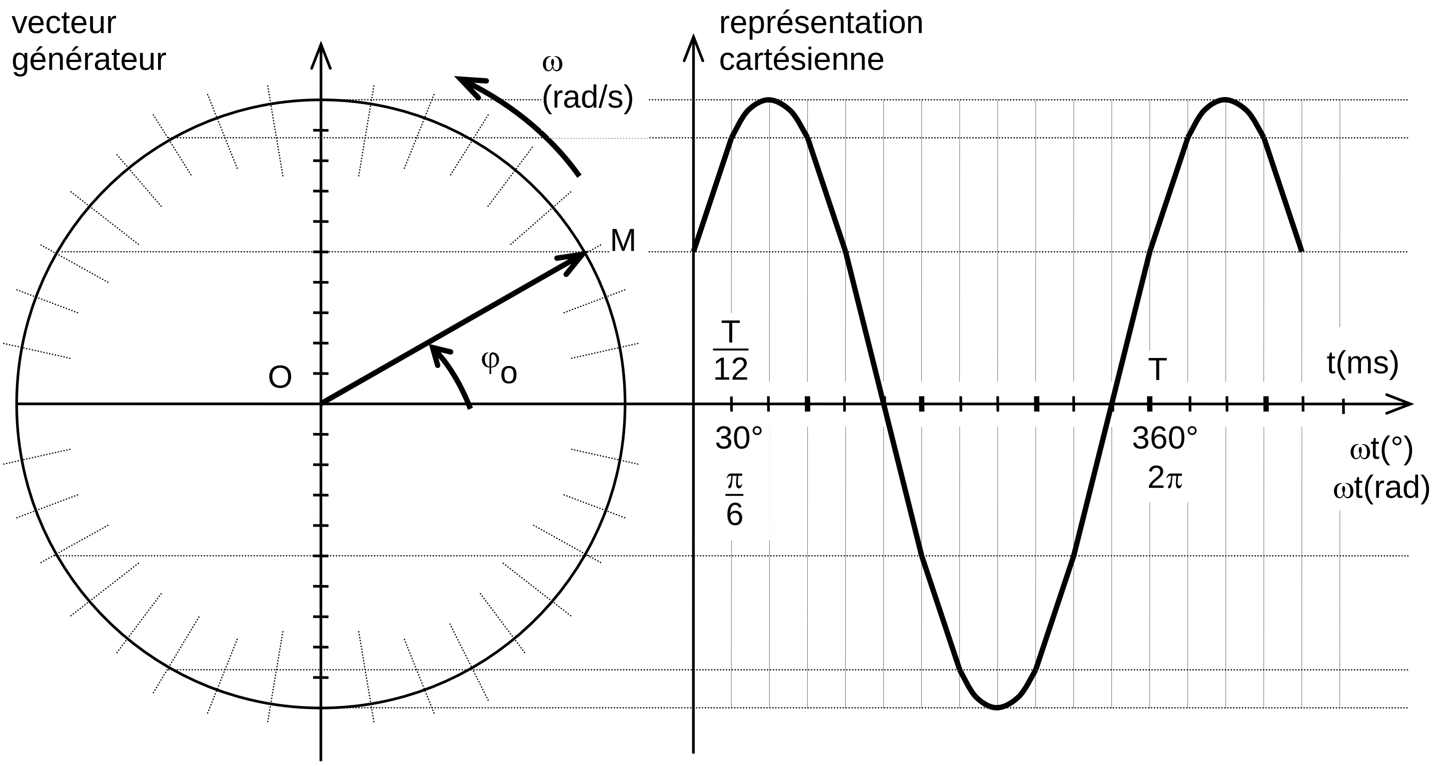
ωt est la **phase** de u(t) en radians

ci-dessus u(t) = 10 sin ($\frac{2\pi}{T}$ t)

➔ **pour tracer une courbe sinusoïdale** on se souvient de

sin 0 = **0**, sin 30° = 0,5 = $\mathbf{\frac{1}{2}}$, sin 60° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ = 0,866 ≅ $\mathbf{\frac{7}{8}}$ = 0,875, sin 90° = **1**, etc. …

Si à l'instant origine des temps, t = 0 s, la tension n'est pas nulle, la phase n'est pas nulle



L'expression mathématique de la courbe obtenue s'écrit

$\boxed{\mathbf{u(t) = A \sin (\omega t + \varphi_o)}}$ u est la hauteur de $\overrightarrow{OM}$.

A = | $\overrightarrow{OM}$ | est **l'amplitude** de h(t)

($\omega t + \varphi$) est la **phase** de h(t)

φ_o est la **phase à l'origine** des temps(on dit "**phase origine**")

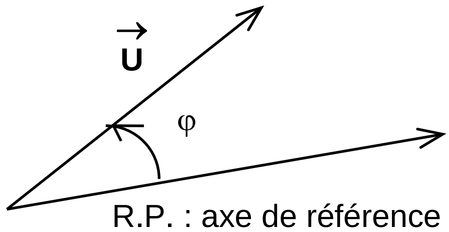
ci-dessus $u(t) = 10 \sin (\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{6})$

2.2. Le vecteur de Fresnel $\vec{U}$

Représentation vectorielle d'une grandeur sinusoïdale représentation dite de Fresnel

définition :

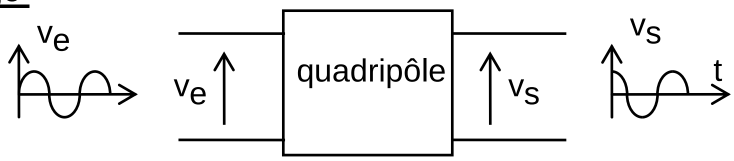
Le vecteur de Fresnel $\vec{U}$, de longueur U
et faisant un angle φ_o avec un axe appelé "axe de référence des phases",
est le vecteur générateur de la grandeur sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi_o)$ à l'origine des temps (t = 0).



R.P. : axe de référence des phases

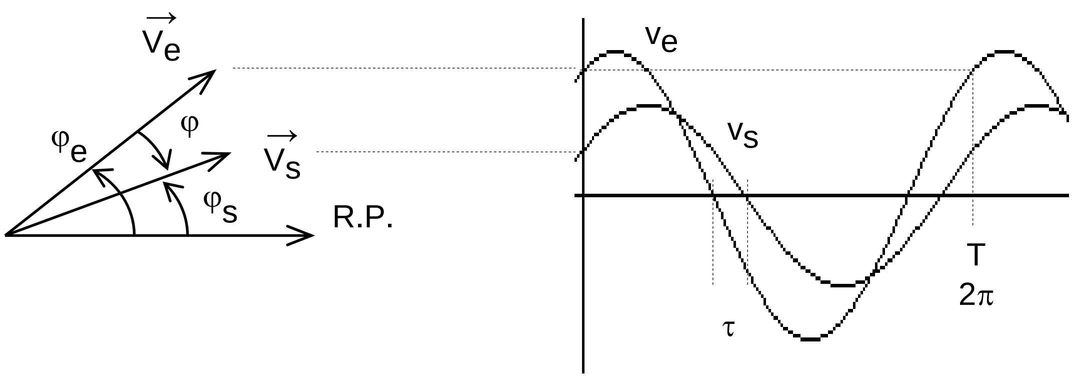
La longueur du vecteur est habituellement égale à la valeur efficace de la grandeur sinusoïdale car c'est la valeur mesurée par les appareils de mesure traditionnels.
Mais on peut aussi choisir l'amplitude $U_{max} = U\sqrt{2}$.

2.3. Le déphasage



2.3.1. Le déphasage de $v_S(t)$ par rapport à $v_e(t)$ est par $\boxed{\varphi = \varphi_s - \varphi_e}$

Représentations vectorielle et cartésienne de v_e et de v_S



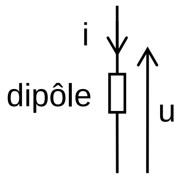
Calcul de φ à partir du **décalage horaire τ** :

$$\boxed{\varphi \text{ (en degrés)} = 360\,\frac{\tau}{T}} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{\varphi \text{ (en radians)} = 2\pi\,\frac{\tau}{T}}\ .$$

le signe de φ

Si φ est **positif**, v_S est **en avance** sur v_e Si φ est **négatif**, v_S est **en retard** sur v

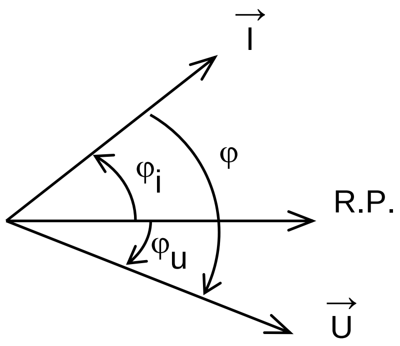
2.3.2. Le déphasage φ introduit par un dipôle

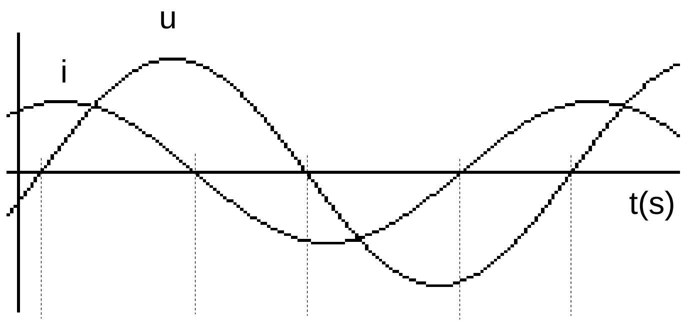


est par définition $\boxed{\varphi = \varphi_u - \varphi_i}$,
où φ_u est la phase origine de la tension aux bornes du dipôle
et φ_i est la phase origine du courant.

On dit aussi, déphasage de la tension u par rapport au courant i .

diagramme vectoriel et **représentation cartésienne** de u et de i





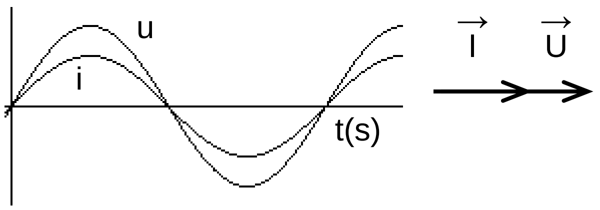
la flèche repérant φ

a sa pointe sur $\vec{U}$

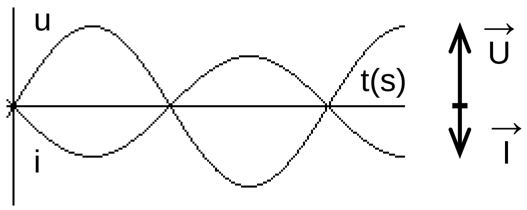
calcul de φ : $\boxed{\varphi \text{ (en degrés)} = 360\,\dfrac{\tau}{T}}$ ou $\boxed{\varphi \text{ (en radians)} = 2\pi\,\dfrac{\tau}{T}}$

2.3.3. cas particuliers :

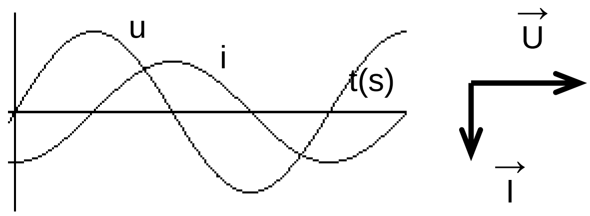
u et i sont **en phase : $\varphi = 0$**



u et i **en opposition de phase : $\varphi = \pm\,\pi$ ou $\pm$ 180°**

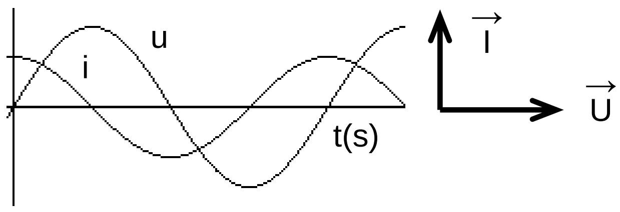


u et i sont **en quadrature : $\varphi = +\dfrac{\pi}{2}$**



i est en avance sur u

u et i sont **en quadrature : $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$**



i est en retard sur u

2.4. l'opération somme de grandeurs sinusoïdales de même pulsation

Les vecteurs de Fresnel permettent de faire rapidement la somme de grandeurs sinusoïdales de même pulsation. Chaque grandeur sinusoïdale est représentée par un vecteur. La somme de ces grandeurs sinusoïdales est alors représentée par ***le vecteur somme*** *des vecteurs représentant chaque grandeur sinusoïdale.*

Exemple : un nœud permet d'écrire la loi $i = i_1 + i_2 + i_3$,
on veut déterminer i, connaissant i_1, i_2 et i_3,

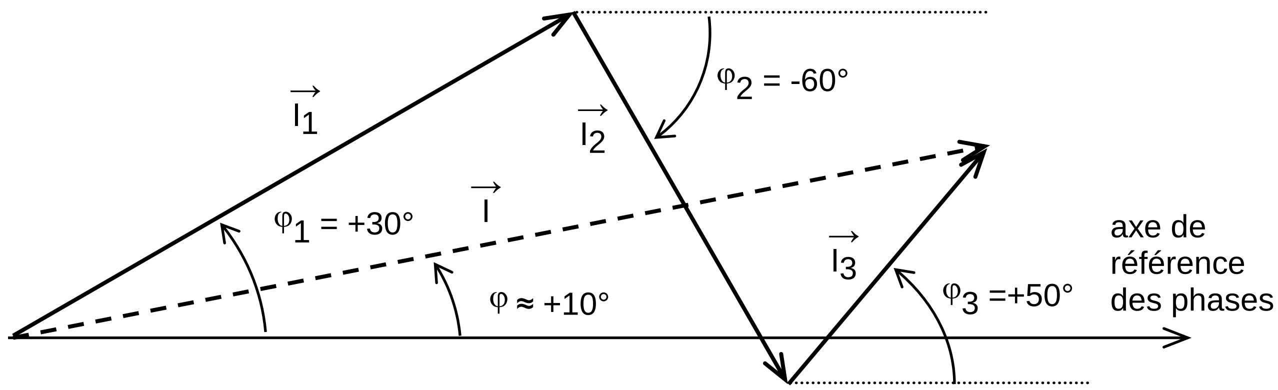
$i_1 = 10 \sin (314\, t + \frac{\pi}{6})$ $\quad + \frac{\pi}{6}$ ou + 30°

$i_2 = 6 \sin (314\, t - \frac{\pi}{3})$ $\quad - \frac{\pi}{3}$ ou - 60°

$i_3 = 4 \sin (314\, t + \frac{5\pi}{18})$ $\quad + \frac{5\pi}{18}$ ou + 50°

la somme des trois vecteurs $\vec{I_1}$ représentant i_1, $\vec{I_2}$ représentant i_2 et $\vec{I_3}$ représentant i_3,

donne le vecteur $\vec{I}$ représentant i



d'après la construction graphique on trouve $i = 14{,}5 \sin (314\, t + 10 \,.\, \frac{\pi}{180})$

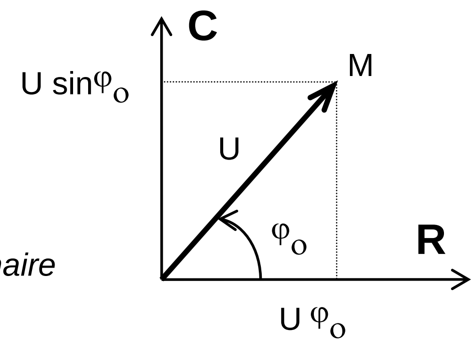
2.5. la représentation complexe est la représentation de grandeurs sinusoïdales **de même pulsation** par des nombres complexes.

La grandeur sinusoïdale $\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\ \sin(\omega t + \varphi_o)}$

admet comme représentation complexe efficace

$\underline{U} = U.\,e^{j\varphi_o} = U.\cos\varphi_o + j\,U.\sin\varphi_o$

forme algébrique = partie réelle + j partie imaginaire



on écrit souvent $\underline{U} = [\,U\,;\,\varphi_o\,]$

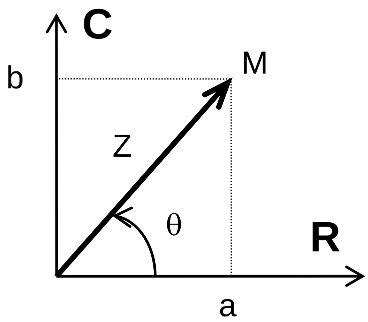
forme géométrique = [module ; argument]

Le choix de la valeur efficace est due à ce que les multimètres usuels indiquent les valeurs efficaces des grandeurs sinusoïdales.
Par commodité, il arrive parfois de travailler avec représentation complexe maximale. Les résultats obtenus seront des valeurs maximales

2.5.1. Avec la calculatrice, pour passer de la forme algébrique à la forme géométrique

on utilise les touches des fonctions

de conversion de **coordonnées rectangulaires [a , b]** en **coordonnées polaires [Z ; θ]**



POL [a , b] = [Z ; θ] et REC[Z ; θ] = [a , b]

vérifier en calculant

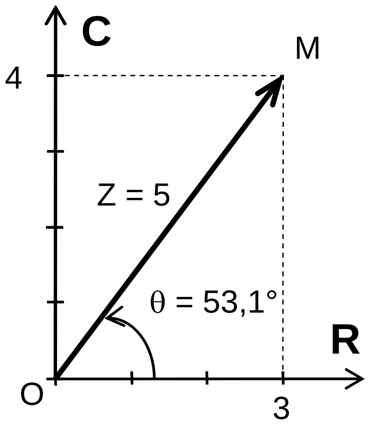
POL [3 , 4] = [5 ; 53,1°] et REC[5 ; 53,1°] = [3 , 4]

avec une calculatrice CASIO :

OPTN puis ANGL puis Pol() ou Rec()

exemple

en mode degré Pol(3,4) EXE donne 5 et 53,1°
et Rec(5,53,1) donne 3 et 4



avec une calculatrice TI :

3+4i ►Polaire ENTER donne 5e^53,1i

5e^53,1.π/180i ►Rect ENTER donne 3+4i

<u>représentation dans le plan complexe</u> :

exemple :

$i(t) = 6 \sin(314\, t - \frac{\pi}{3})$ **est représenté par** $\underline{I} = 6\, e^{-j\frac{\pi}{3}}$ = [6A ; - 60°] = 3 – 5,2 j

2.5.2. l'opération somme

<u>Exemple</u> : $i = i_1 + i_2 + i_3$, tous ces courants sont sinusoïdaux de même pulsation

on veut vérifier le résultat obtenu pour i avec la méthode vectorielle

$i_1 = 10 \sin(314\, t + \frac{\pi}{6})$ est représenté par $\underline{I}_1$ = **[10A ; + 30°] = 8,66 + 5 j**

$i_2 = 6 \sin(314\, t - \frac{\pi}{3})$ est représenté par $\underline{I}_2$ = **[6A ; - 60°] = 3 – 5,2 j**

$i_3 = 4 \sin(314\, t + \frac{5\pi}{18})$ est représenté par $\underline{I}_3$ **= [4A ; + 50°] = 2,57 + 3,06 j**

d'où $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ **= 8,66 + 3 + 2,57 + 5 j – 5,2 j + 3,06 j**
= 14,23 + 2,86 j

= [14,5 A ; 11,4°]

comme **$11{,}4° = 11{,}4 \times \frac{\pi}{180} = 0{,}2$ rad**

on obtient $\boxed{\mathbf{i(t) = 14{,}5 \sin(314\, t + 0{,}2)}}$

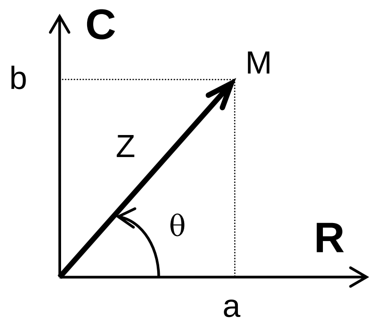
Annexe : Rappels mathématiques : les nombres complexes Z

n nombre complexe s'écrit sous **forme algébrique** : $\boxed{\underline{Z} = a + j\,b}$

où a est la **partie réelle** de $\underline{Z}$, b est la **partie imaginaire** de $\underline{Z}$

j est un nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$.

Le plan complexe :



on peut représenter un nombre complexe $\underline{Z} = a + j\,b$
par un point M dans un plan repéré
par **l'axe des réels** $\Re$
et par **l'axe des imaginaires** $\Im$.

M est le point d'abscisse a et d'ordonnée b.
On dit que **l'affixe du point M** est $\underline{Z} = a + j\,b$.

$\underline{Z}$ s'écrit aussi sous **forme trigonométrique** $\boxed{\underline{Z} = Z\,(\cos\theta + j\sin\theta)}$

où Z est le **module** de $\underline{Z}$ et θ est **l'argument** de Z.

on écrit pour simplifier $\underline{\mathbf{Z}}$ **= [Z ; θ]** ou parfois $\underline{Z} = Z \angle \theta$.

Règles de calculs :

$a = Z\cos\theta$, $b = Z\sin\theta$, $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = \arctan\dfrac{\text{partie imaginaire}}{\text{partie réelle}} = \arctan\dfrac{b}{a}$,

$\dfrac{1}{j} = -j$ donc si dans une fraction j est au dénominateur,

on le monte au numérateur en l'affectant du signe moins "-",

La quantité conjuguée d'un nombre complexe $\underline{Z} = a + j\,b$

est le nombre complexe $\underline{Z}^* = a - j\,b$.

La somme de 2 nombres complexes se fait sous forme algébrique :

si $\underline{Z}_1 = a_1 + j\,b_1$ et $\underline{Z}_2 = a_2 + j\,b_2$, $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = a_1 + a_2 + j\,(b_1 + b_2)$,

la somme de deux nombres complexes a comme partie réelle la somme des parties des réelles et comme partie imaginaire la somme des parties des imaginaires.

Le produit de 2 nombres complexes se fait sous forme trigonométrique :

si $\underline{Z}_1 = [\,Z_1\,;\,\theta_1\,]$ et $\underline{Z}_2 = [\,Z_2\,;\,\theta_2\,]$, alors on montre que $\underline{Z}_1 \,.\, \underline{Z}_2 = [\,Z_1 \,.\, Z_2\,;\,\theta_1 + \theta_2\,]$,

le produit de nombres complexes est un nombre complexe dont le module est le produit des modules et l'argument est la somme des arguments.

$\underline{Z}^n = (\,Z\,(\cos\theta + j\sin\theta)\,)^n = Z^n\,(\cos n\theta + j\sin n\theta)$

Le quotient de nombres complexes :

si $\underline{Z}_1 = [\,Z_1\,;\,\theta_1\,]$ et $\underline{Z}_2 = [\,Z_2\,;\,\theta_2\,]$, alors on montre que $\underline{Z}_1 / \underline{Z}_2 = [\,Z_1 / Z_2\,;\,\theta_1 - \theta_2\,]$,

La formule de Moivre : $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

elle est démontrée facilement à l'aide des développements en séries entières de e^x, sin x et cos x .

Les formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{+j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{+j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$